4DEnVar : lien avec la formulation de l'assimilation variationnelle avec une variable 4D et différentes implémentations possibles

G. Desroziers, J.-T. Camino et L. Berre
Météo-France/CNRS, CNRM/GAME

Projet soutenu par LEFE

Introduction

- 4D-Var
- ✓ Représentation possible d'un **B** dépendant de la situation.
- ✓ Ensemble de 4D-Var (Météo-France, ECMWF) : dynamique
- ➢ des variances d'erreur
- ➢ et des corrélat., avec un **B** ondelette (Fisher, 2003; Varella et al, 2011).

- ✓ Développement et maintenance lourdes des modèles TL/AD.
- ✓ Mauvaise scalabilité du TL/AD à basse résolution.

- 4D-Var basé sur un ensemble 4D : 4DEnVar
- ✓ Bénéfices du 4D-Var (global, termes additionnels, boucles externes, …)
- ✓ Coût de la minimisation plus faible et possibilités de parallélisation.
- ✓ Un pas de plus vers l'utilisation des ensembles ...

Formulation 4DEnVar

Minimisation de

$$J(\underline{\delta\mathbf{x}}) = \underline{\delta\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{B}}^{-1} \underline{\delta\mathbf{x}} + (\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{H}}\ \underline{\delta\mathbf{x}})^T \underline{\mathbf{R}}^{-1} (\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{H}}\ \underline{\delta\mathbf{x}}), \text{ avec}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{X}}^b (\underline{\mathbf{X}}^b)^T,$$

$$\underline{\mathbf{X}}^b = (\underline{\mathbf{x}}^{b'}_1, \ldots, \underline{\mathbf{x}}^{b'}_L),$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{b'}_l = \underline{\mathbf{x}}^b_l - \langle \underline{\mathbf{x}}^b \rangle / (L-1)^{1/2},\ l=1,L, \text{ et } L \text{ taille de l'ensemble.}$$

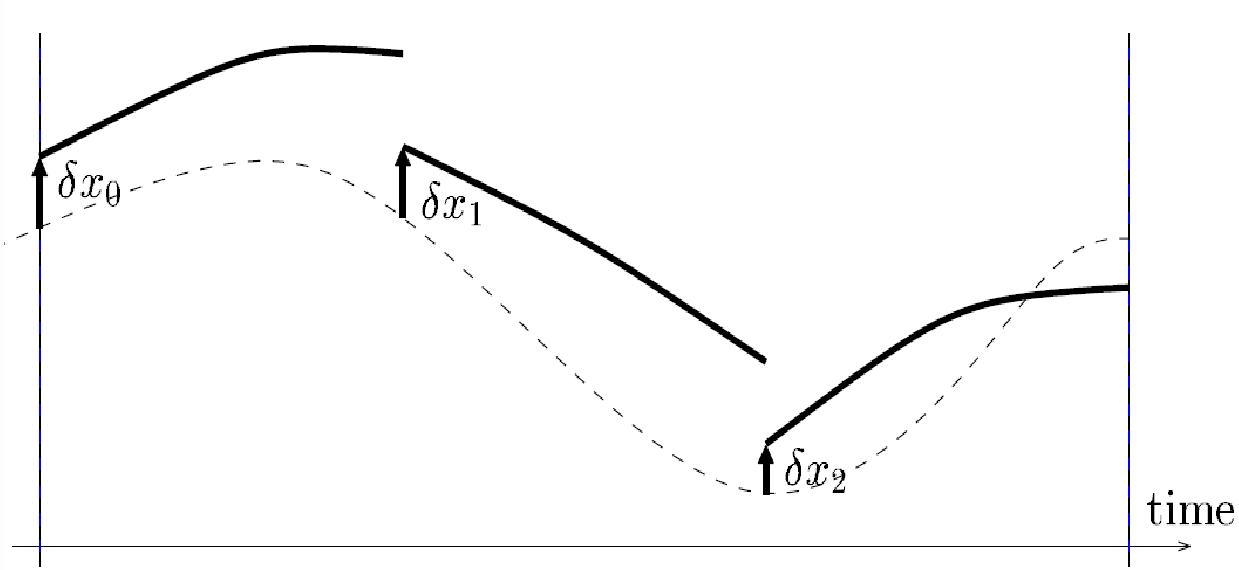
Les $\underline{\mathbf{x}}^{b'}$ sont de dimension (K+1) (temps) x M (variables 3D) x N (dim 3D).

(Liu et al, 2008, 2009 ; Buehner et al, 2010 ; Lorenc, 2012)

Formulation de l'assimilation variationnelle avec une variable 4D

4D-Var avec erreurs de modèle décorrélées dans le temps : minimisation de

$$J(\delta \mathbf{x}_0, \ldots, \delta \mathbf{x}_K) = \delta \mathbf{x}_0^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_0 + \Sigma_{k=1,K} (\delta \mathbf{x}_k - \mathbf{M}_k \delta \mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\delta \mathbf{x}_k - \mathbf{M}_k \delta \mathbf{x}_{k-1})$$
$$+ \Sigma_{k=0,K} (\mathbf{H}_k \ \delta \mathbf{x}_k - \mathbf{d}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{H}_k \ \delta \mathbf{x}_k - \mathbf{d}_k).$$



(Figure Trémolet, 2006)

Formulation de l'assimilation variationnelle avec une variable 4D

- Minimisation de

$$J(\delta\mathbf{x}_0, \ldots, \delta\mathbf{x}_K) = \delta\mathbf{x}_0^T \mathbf{B}^{-1} \delta\mathbf{x}_0 + \Sigma_{k=1,K} (\delta\mathbf{x}_k - \mathbf{M}_k \delta\mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\delta\mathbf{x}_k - \mathbf{M}_k \delta\mathbf{x}_{k-1})$$
$$+ \Sigma_{k=0,K} (\mathbf{H}_k \ \delta\mathbf{x}_k - \mathbf{d}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{H}_k \ \delta\mathbf{x}_k - \mathbf{d}_k).$$

$$\delta\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{x}_0 \\ \delta\mathbf{x}_1 \\ \\ \delta\mathbf{x}_K \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & & \\ & \mathbf{Q}_1 & \\ & & \\ & & \mathbf{Q}_K \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & & \\ \mathbf{M}_0^1 & \mathbf{I} & \\ & & \\ \mathbf{M}_0^K & \mathbf{M}_1^K & & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{L}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & & \\ -\mathbf{M}_1 & \mathbf{I} & \\ & & \\ & & -\mathbf{M}_K & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

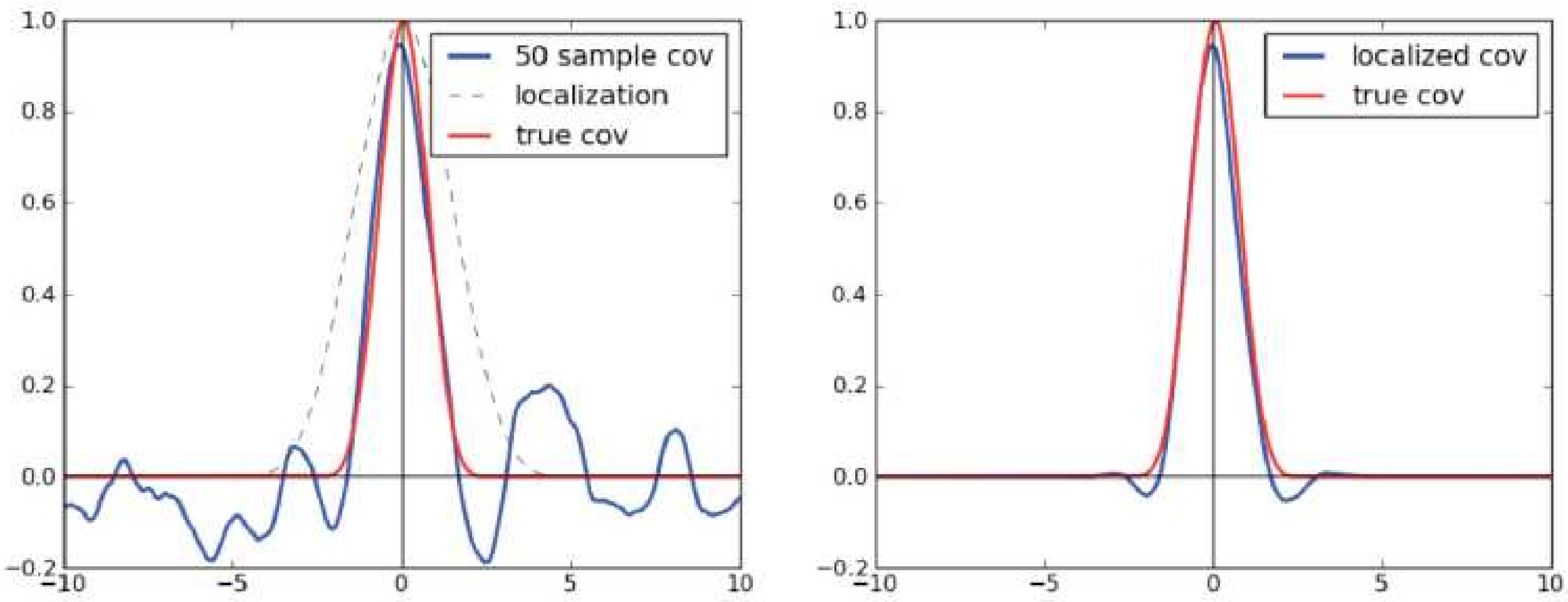
$$J(\delta\underline{\mathbf{x}}) = \delta\underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{L}}^{-T} \underline{\mathbf{D}}^{-1} \underline{\mathbf{L}}^{-1} \delta\underline{\mathbf{x}} + (\underline{\mathbf{H}} \ \delta\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{d}})^T \underline{\mathbf{R}}^{-1} (\underline{\mathbf{H}} \ \delta\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{d}}).$$

(Courtier, 1997 ; Trémolet, 2006 ; Fisher, 2013)

- Equivalent à la minimisation de

$$J(\delta\underline{\mathbf{x}}) = \delta\underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{B}}^{-1} \delta\underline{\mathbf{x}} + (\underline{\mathbf{H}} \ \delta\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{d}})^T \underline{\mathbf{R}}^{-1} (\underline{\mathbf{H}} \ \delta\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{d}}), \qquad \text{avec } \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{L}} \, \underline{\mathbf{D}} \, \underline{\mathbf{L}}^T.$$

Localisation des covariances ensemblistes



(Figure Whitaker, 2011)

Localisation des covariances ensemblistes

- Localisation d'une matrice 4D :

$$\underline{\mathbf{B}} = \left(\underline{\mathbf{X}}^{b'} \left(\underline{\mathbf{X}}^{b'} \right)^{T} \right) \circ \underline{\mathcal{C}}.$$

- Localisation simplifiée :

$$\underline{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N \\ \\ \\ \mathbf{I}_N \end{pmatrix} \mathcal{C} \left(\mathbf{I}_N \, \mathbf{I}_N \quad \mathbf{I}_N \right) = \underline{\mathbf{1}} \, \mathcal{C} \, \underline{\mathbf{1}}^{T}, \text{ avec } \mathbf{I}_N \text{ matrice identité } N \times N.$$

- La mat. $\underline{\mathbf{1}}$ contient $(K+1) \times M$ blocs $\mathbf{I}_N$ et $\mathcal{C}$ est une mat. de correl. $N \times N$.

- Représentation spectrale de $\mathcal{C}$: $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{-1} \, \mathcal{C}^{s} \, \mathcal{S}^{-T}$, et donc

$$\underline{\mathbf{B}} = \left(\underline{\mathbf{X}}^{b'} \left(\underline{\mathbf{X}}^{b'} \right)^{T} \right) \circ \left(\underline{\mathbf{1}} \, \mathcal{S}^{-1} \, \mathcal{C}^{s} \, \mathcal{S}^{-T} \, \underline{\mathbf{1}}^{T} \right).$$

Implémentations du 4DEnVar

- *Formulation 1*

$\underline{\delta \mathbf{x}} = \underline{\mathbf{B}}^{1/2} \chi = (\underline{\mathbf{X}}^b (\underline{\mathbf{X}}^b)^T \circ (\underline{\mathbf{1}}\ \mathcal{S}^{-1}\ \mathcal{C}^s\ \mathcal{S}^{-T}\ \underline{\mathbf{1}}^T))^{1/2} \chi = \Sigma_{\ell=1,L}\ \underline{\mathbf{x}}^{b'}{}_{\ell} \circ (\underline{\mathbf{1}}\ \mathcal{S}^{-1}\ \mathcal{C}^{s1/2} \chi_\ell)$

$J^b(\chi) = \Sigma_{\ell=1,L}\ \chi_\ell^T \chi_\ell$, dim $\chi = N\ (N^s) \times L$

Gradient conjugué (CG) avec un changement de variable en $\underline{\mathbf{B}}^{1/2}$

(Buehner, 2005, 2010)

- *Formulation 2*

$\underline{\delta \mathbf{x}} = \Sigma_{\ell=1,L}\ \underline{\mathbf{x}}^{b'}{}_{\ell} \circ (\underline{\mathbf{1}}\ \alpha_\ell)$, avec $\alpha_\ell = \mathcal{C}^{1/2} \chi_\ell$

$J^b(\alpha) = \Sigma_{\ell=1,L}\ \alpha_\ell^T\ \mathcal{C}^{-1} \alpha_\ell$, dim $\alpha = N\ (N^s) \times L$

(Lorenc, 2003)

Implément. alternative possible du 4DEnVar : préconditionnement par la matrice 4D $\underline{\mathbf{B}}$

- *Formulation 3*

DPCG, avec la matrice de covariance 4D $\underline{\mathbf{B}}$: BCG

(Derber and Rosati, 1989; El Akkraoui et al, 2012; Gürol et al, 2012)

Dans ce cas, la dimension de la variable de contrôle $\underline{\delta\mathbf{x}}$ est (K+1) x M x N.

$$\underline{\mathbf{d}}_{-1} = \underline{\mathbf{e}}_{-1} = 0$$
$$\beta_{-1} = 0$$
$$\underline{\delta\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$$
$$\underline{\mathbf{g}}_0 = \underline{\mathbf{H}}^T \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{d}}$$
$$\underline{\mathbf{h}}_0 = \underline{\mathbf{B}}\, \underline{\mathbf{g}}_0$$

for i = 0 : I - 1

$$\underline{\mathbf{d}}_i = \underline{\mathbf{h}}_i + \beta_{i-1} \underline{\mathbf{d}}_{i-1}$$
$$\underline{\mathbf{e}}_i = \underline{\mathbf{g}}_i + \beta_{i-1} \underline{\mathbf{e}}_{i-1}$$
$$\underline{\mathbf{f}}_i = \underline{\mathbf{e}}_i + \underline{\mathbf{H}}^T \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{H}}\, \underline{\mathbf{d}}_i$$
$$\alpha_i = \underline{\mathbf{g}}_i^T \underline{\mathbf{h}}_i / \underline{\mathbf{d}}_i^T \underline{\mathbf{f}}_i$$
$$\underline{\delta\mathbf{x}}_{i+1} = \underline{\delta\mathbf{x}}_i + \alpha_i \underline{\mathbf{d}}_i$$
$$\underline{\mathbf{g}}_{i+1} = \underline{\mathbf{g}}_i - \alpha_i \underline{\mathbf{f}}_i$$
$$\underline{\mathbf{h}}_i = \underline{\mathbf{B}}\, \underline{\mathbf{g}}_i$$
$$\beta_i = \underline{\mathbf{g}}_{i+1}^T \underline{\mathbf{h}}_{i+1} / \underline{\mathbf{g}}_i^T \underline{\mathbf{h}}_i$$

end

METEO FRANCE

Multiplication par $\underline{\mathbf{B}}$

- Application de la matrice $\underline{\mathbf{B}}$ au gradient :

$$\underline{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{B}}\,\underline{\mathbf{g}}$$

$$= \Sigma_{\ell=1,L}\, \underline{\mathbf{x}}^{b'}{}_{l} \circ (\ \underline{\mathbf{1}}\ S^{-1} (\ \boldsymbol{C}^{s}\ S^{-T}\ \underline{\mathbf{1}}^{T} (\ \underline{\mathbf{x}}^{b'}{}_{l} \circ \underline{\mathbf{g}}\ )\ )\ ),$$

ℓ indice de membre.

- Expression compacte et “parlante”.
- Pas de variables additionnelles (χ_{ℓ} ou α_{ℓ}).
- Différentes possibilités pour la parallélisation.

Implément. alternative possible du 4DEnVar: préconditionnement par $\underline{\mathbf{B}}$ dans l'espace dual

- *Formulation 4*

BCG dans l'espace des observations : RBCG
(Gratton and Tshimanga, 2009; Gürol, 2012, 2013).

Similaire au BCG précédent mais avec $\underline{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{H}}\ \underline{\mathbf{B}}\ \underline{\mathbf{H}}^T\ \underline{\mathbf{g}}$.

Dans ce cas, la taille de la variable de contrôle $\underline{\delta \mathbf{y}}$ et du gradient $\underline{\mathbf{g}}$ est P (nombre d'observations).

Formulation hybride

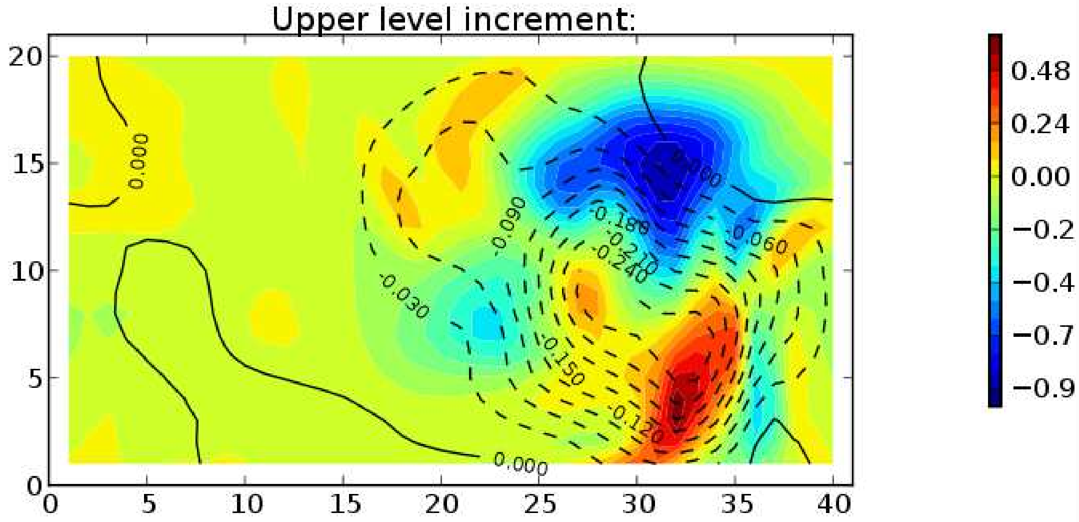
- Matrice hybride $\underline{\mathbf{B}}^h$:

$$\underline{\mathbf{B}}^h = \gamma^{c2}\, \underline{\mathbf{B}}^c + (1- \gamma^{s2})\, \underline{\mathbf{B}}^e \qquad \underline{\mathbf{B}}^{h1/2} = \left(\gamma^c\, \underline{\mathbf{B}}^{c1/2} \quad (1- \gamma^{c2})^{1/2}\, \underline{\mathbf{B}}^{e1/2} \right)$$

(Hamill and Snyder, 2000)

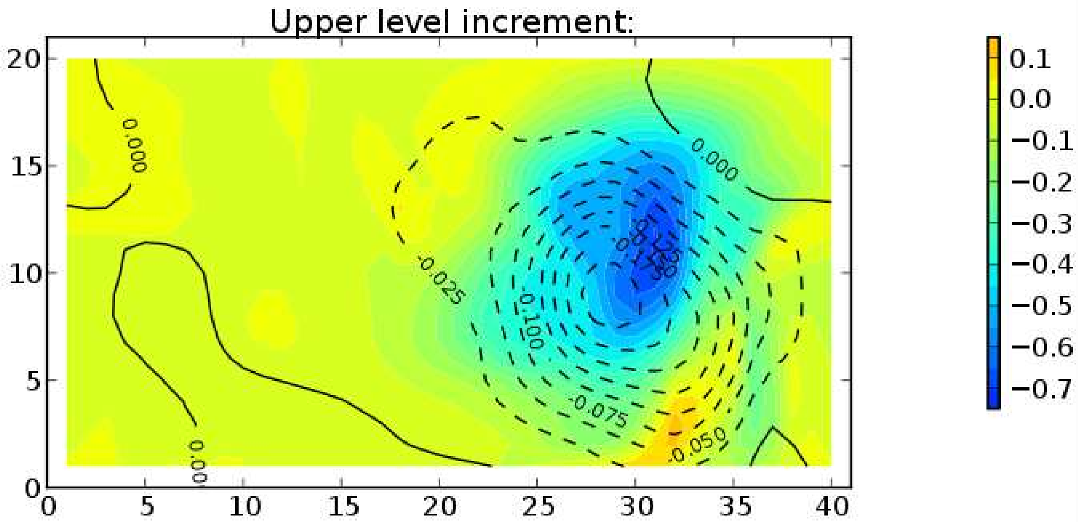
- Le type et la taille de la variable de contrôle dépendent de la formulation :
  - ✓ *Formulation 1 :* $J(\chi^c , \chi^e)$
  - ✓ *Formulation 2 :* $J(\delta\mathbf{x}^c, \alpha)$
  - ✓ *Formulation 3 :* $J(\underline{\delta\mathbf{x}})$
  - ✓ *Formulation 4 :* $J(\underline{\delta\mathbf{y}})$

Formulation hybride
avec un modèle quasi-geostrophique



δx 4DEnVar, avec le BCG

ligne tiretée : ψ
couleur : q



δx 4DEnVar hybride, avec le BCG

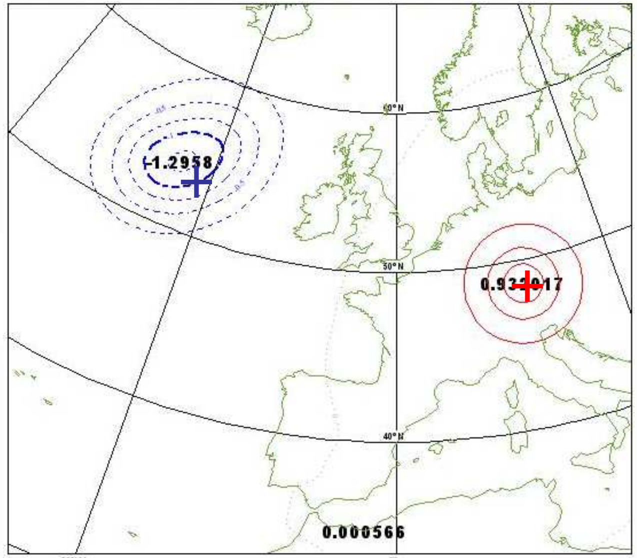
Developpé (Arbogast, 2013) dans OOPS (Trémolet et Fisher, 2013)

METEO FRANCE

Premiers résultats dans ARPEGE

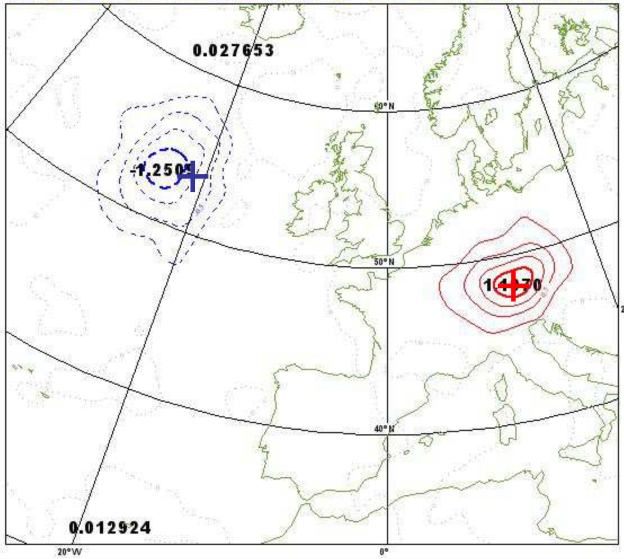
Incrément à t_0 avec 1 obs à t_0 et 1 obs à t_f=6h

4D-Var



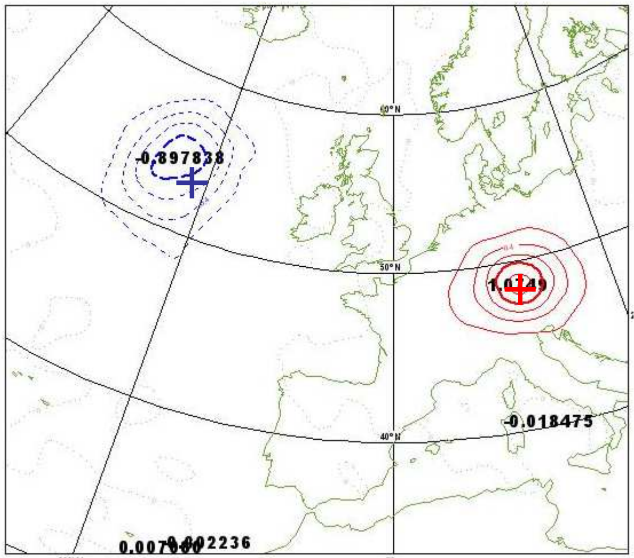
4DEnVar

50 mbs



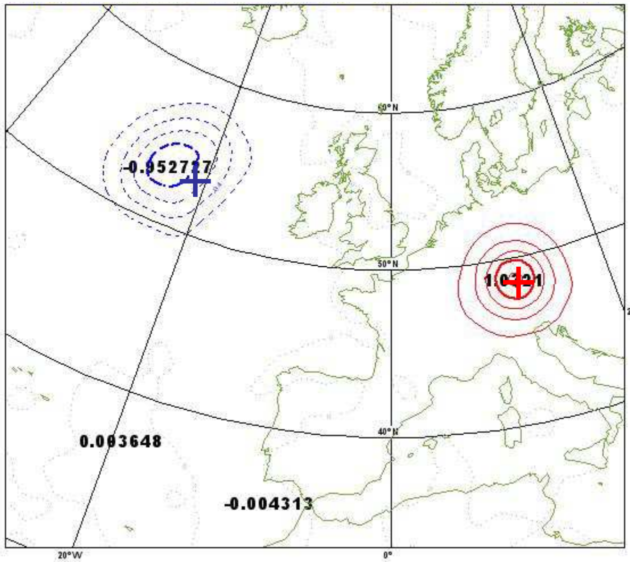
4DEnVar

200 mbs



4DEnVar

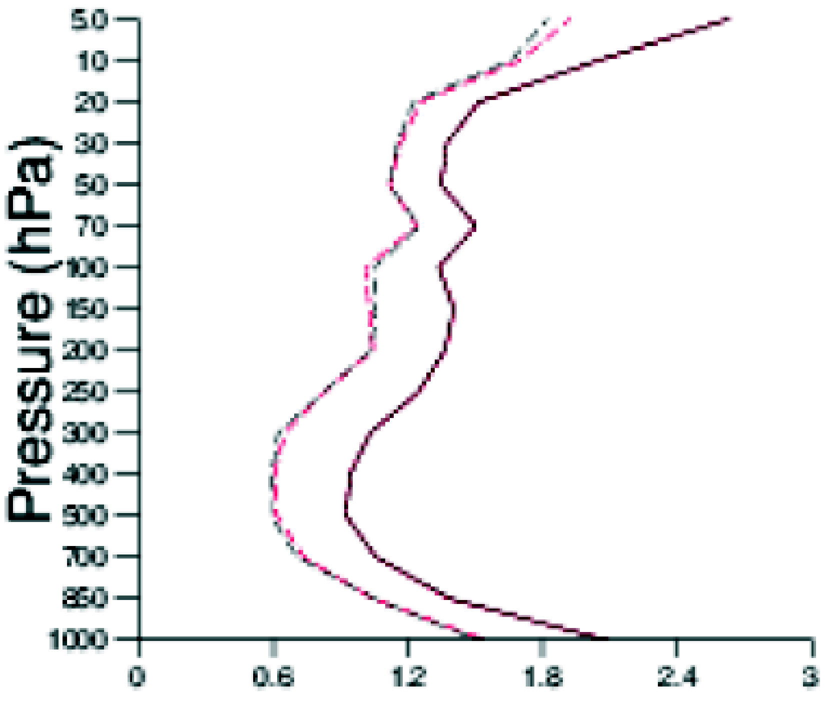
1000 mbs



(Arbogast 2014)

Premiers résultats dans le modèle global ARPEGE

4D-Var / 4DEnVar 6h avec les obs. « conventionnelles »



RMS en température (RS) des écarts **obs - analyse**

4D-Var T149

4DEnVar T149 (200 membres)

RMS en température (RS) des écarts **obs - ébauche**

(résultats Arbogast, 2014)

Conclusion et perspectives

Conclusion

✓ Lien entre le 4DEnvar et
la formulation de l'assimilation variationnelle avec une variable 4D.

✓ Préconditionnement efficace reposant sur **B**

✓ BCG avec **B**, et RBCG dans l'espace dual :
implémentations alternatives possibles.

Perspectives

✓ Définir une localisation raisonnable et efficace dans
l'espace et dans le temps.

✓ Filtrage des variances.

✓ Ajout boucle externe.

✓ Ensemble de 4DEnVars ?

✓ Développement en parallèle de l'EnVar pour le modèle en domaine limité AROME.