

AMA 2018



12/02/2018

Nouveau modèle d'ascendance convective prenant en compte la pression

Julien LEGER
(CNRM/GMME/TROPICS)

(c) Cherki David

Directeur de thèse : Jean-Philippe Lafore (CNRM/GMME/TROPICS)
Co-directeur : Jean-Marcel Piriou (CNRM/GMAP/PROC)
Co-directeur : Jean-François Guérémy (CNRM/GMPEC/PASTEL)

Plan

I. La convection : une question de flottabilité et d'entraînement ?

II. Le modèle WB

III. Utilisation de simulations LES

- a) Approche par objet
- b) Approche Bulk

IV. Conclusions et Perspectives

I. La convection : une question de flottabilité et d' entraînement ?

- Nécessité de paramétriser la convection : développement de « mini-modèles » simplifiés ⇒ existence d'une multitude de schémas basés sur différents concepts (problème non résolu actuellement).
 - Amélioration des schémas de convection : nécessité de mettre plus de physique.
 - La convection : **problème non local**, régi en partie par la **pression**
 - Actuellement, pas de prise en compte explicite de ce terme dans les schémas
 - Mais récent intérêt (ex : Morrison, 2015 ; Romps et al., 2015 ; De Roode et al., 2011)
 - **Cadre de travail, PCMT** : schéma de convection unifié avec équations pronostiques sous-mailles (microphysique et vitesse verticale) développé à MF (Piriou et Guérémy)
 - CMIP6, PEARP et prévisions saisonnières
- ⇒ **Amélioration de l'équation pronostique de la vitesse verticale de PCMT en prenant en compte la pression**

Objectif de la thèse :

Prendre en compte le rôle de la pression pour améliorer les paramétrisations de la convection

II. Le modèle WB

Équation classique utilisée pour la vitesse verticale dans le nuage :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -w \frac{\partial w}{\partial z} + \alpha_B B - \alpha_\epsilon \epsilon w^2$$

Avec α_B et α_ϵ des coefficients à déterminer.

α_B ($\alpha_B < 1$) : représentation des effets des perturbations de pression non hydrostatique et de la variabilité sous-mailles

α_ϵ : modulation de l'intensité de l'entraînement latéral

Multitude de valeurs pour les coefficients α_B et α_ϵ avec une grande incertitude

Système anélastique 2D pronostique : WB

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P'}{\partial z} + B \\ \frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P'}{\partial x} \\ \rho_r \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_r w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Hypothèses :

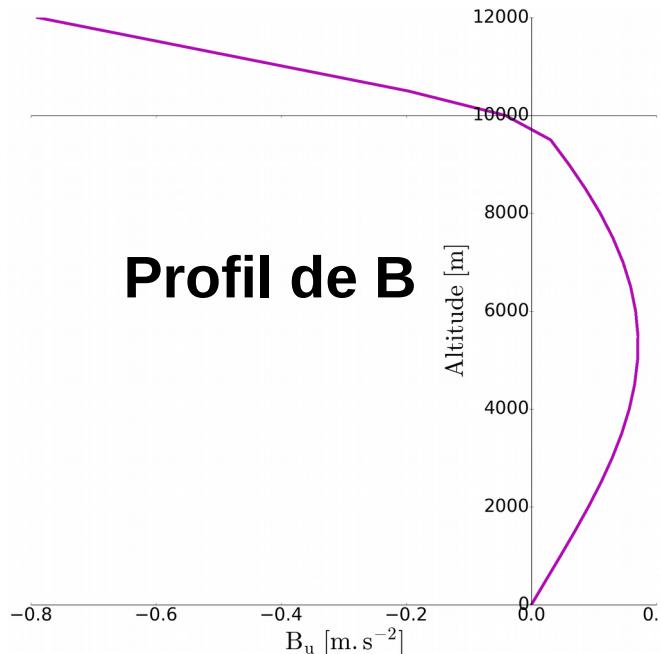
- Système anélastique
- Taille de l'updraft constante sur la verticale
- Différentes formes à l'intérieur de l'updraft
- Différentes géométries pour représenter la convection pop corn ou organisée
- Pas d'entraînement turbulent (la forme de w implique un mélange turbulent)

Codage de la maquette :

- Grille C
- Formulation SL de l'advection de u
- 2 géométries : 2D Slab et 3D Axial
- Facteur de forme : 2D (top hat, linéaire et parabolique)
3D (top hat)
Environnement (top hat)

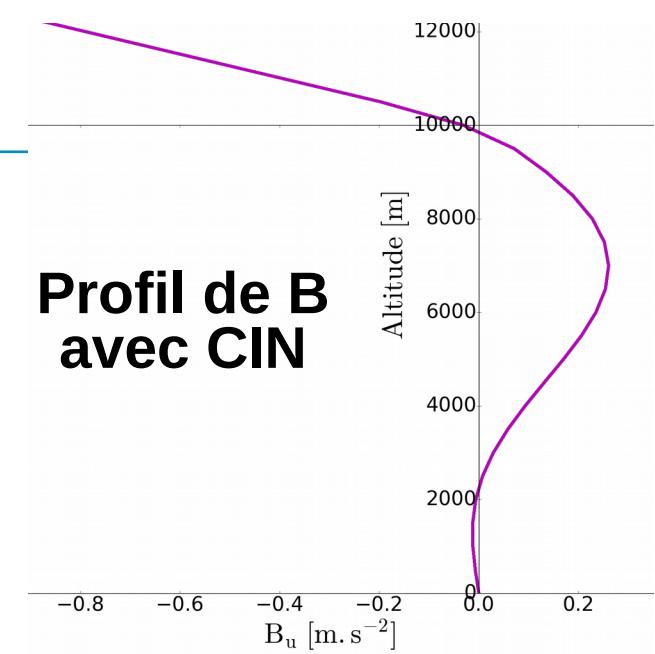
II. Le modèle WB

Profil de B



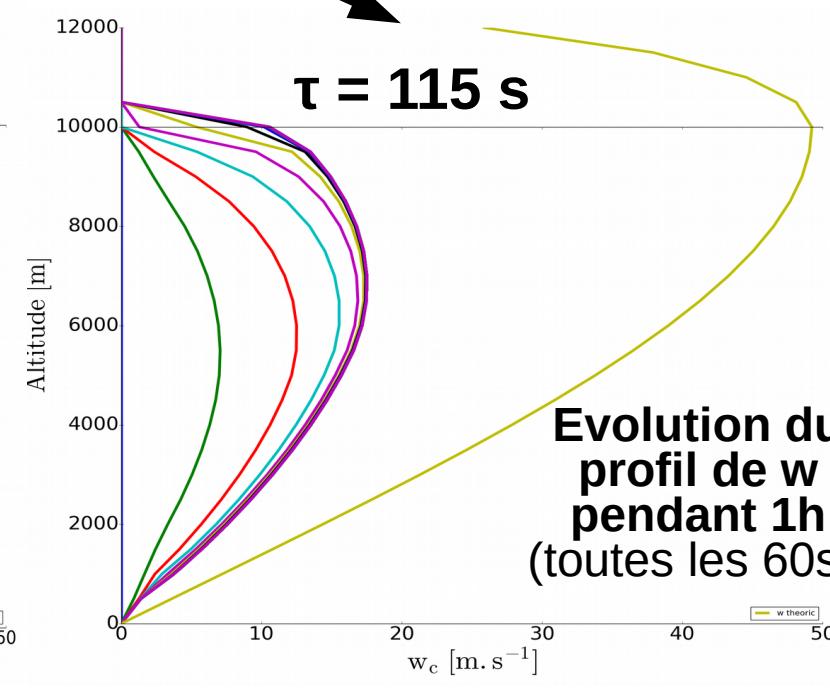
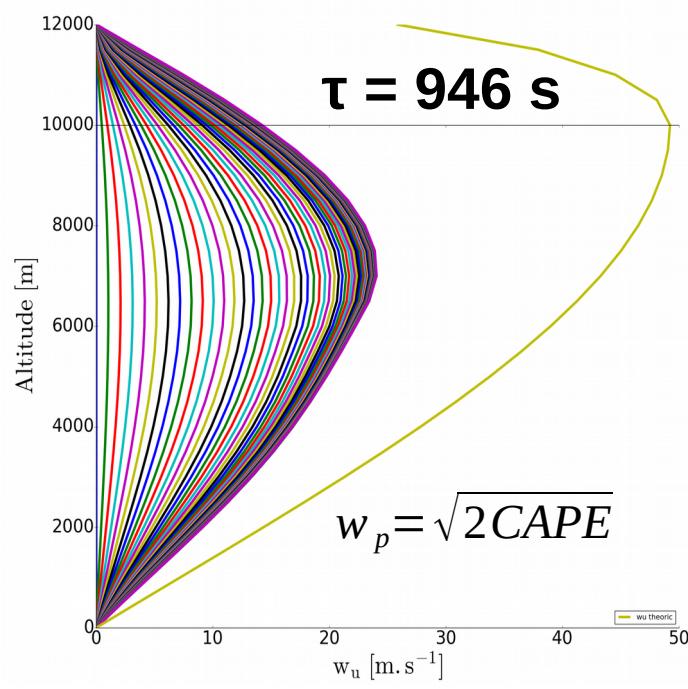
Paramètres WB:
Géométrie Slab
Forme de w parabolique
 $a = 5 \text{ km}$ et $\sigma = 0,10$
CAPE = 1200 J/kg

Profil de B avec CIN

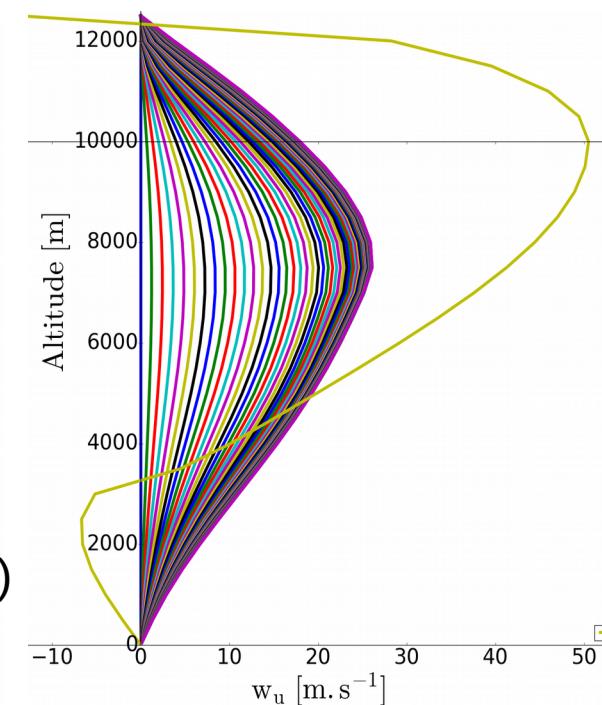


SW69 (PCMT)

WB

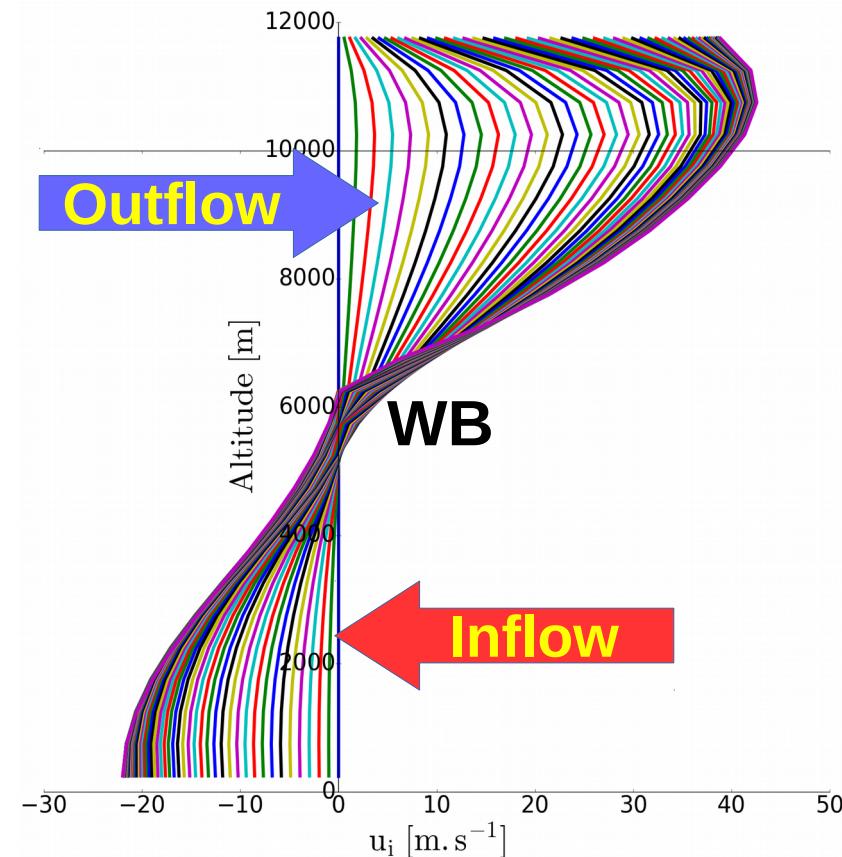


Evolution du profil de w pendant 1h (toutes les 60s)



II. Le modèle WB

Evolution du profil de u_i pendant 1h (toutes les 60s)



Principaux résultats :

- Temps de réponse rapide mais plus long que le SW69 (≈ 100 s)
- Importance du flux de quantité de mouvement à la frontière (dépend de la formulation de l'advection de vent horizontal)
- Sensibilité à la géométrie (3D plus rapide, plus intense et max plus haut)
- Sensibilité à la forme de l'updraft (moindre)
- Maintien de la convection malgré la barrière de CIN

Limites :

- Taille de l'updraft constante sur la verticale
- H fixé $\Rightarrow \text{CAPE}(H) = 0$
- Mauvais fonctionnement lorsque $\sigma = a/b$ est faible (problème de stretching de la grille)
- Subsidence en top hat actuellement
- Axial limité au top hat

III. Utilisation des LES

- Nécessité d'utiliser des simulations LES pour tester les hypothèses du WB (H, a, ...) et valider le modèle à travers la représentation du flux de masse.
- Développement de diagnostics adaptés aux hypothèses du WB.

2 Approches : **Approche par objet** et **approche Bulk**

a) **Approche par objet**

Définition des objets WB

Utilisation de certains critères (Hydrométéores, flux de masse max, ...) pour définir les colonnes convectives.

Faire du clustering pour agréger ces colonnes convectives afin d'obtenir des objet WB \Rightarrow Statistiques

b) **Approche Bulk**

Calcul des flux de masse totaux des updrafts et des downdrafts sur la totalité du domaine de la LES.

III. Utilisation des LES

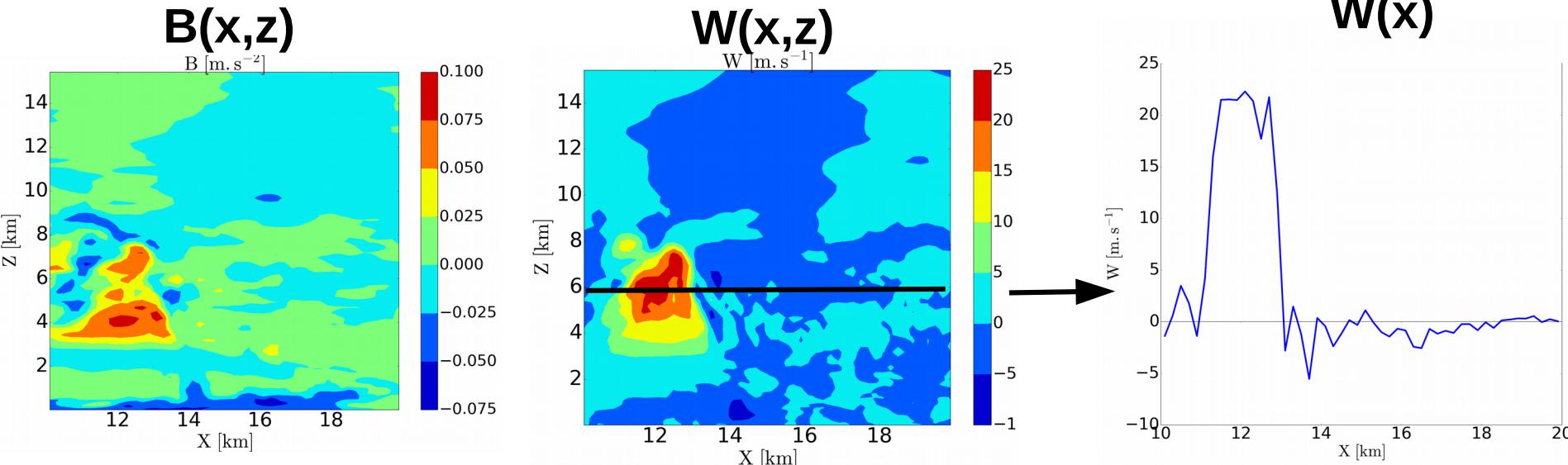
Quelles simulations LES pour mettre en place ces diagnostics ?

Simulation LES idéalisées du cas du 10 juillet 2006 issue de la campagne AMMA (Couvreux et al., 2012). Cas de transition shallow-deep convection.

Caractéristiques de la simulation

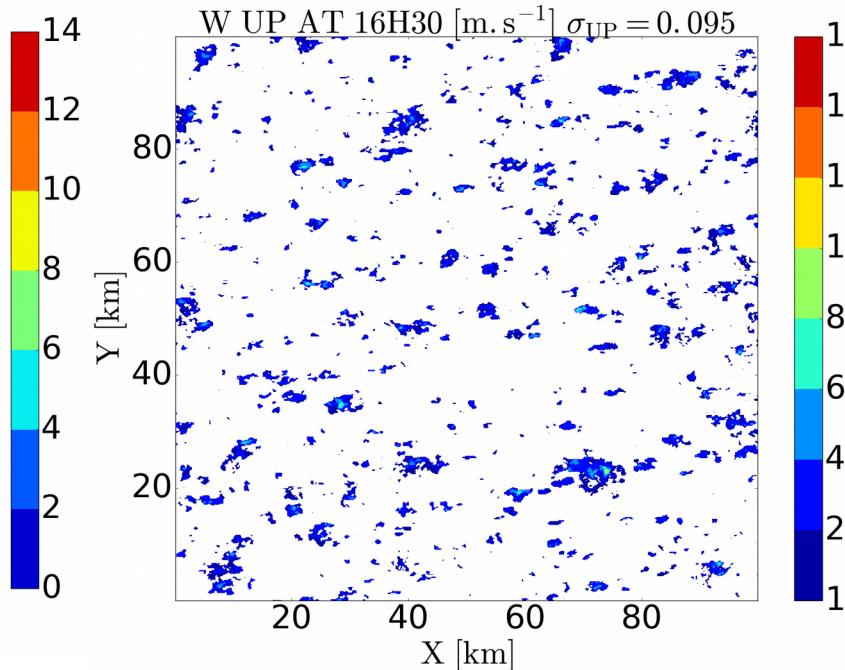
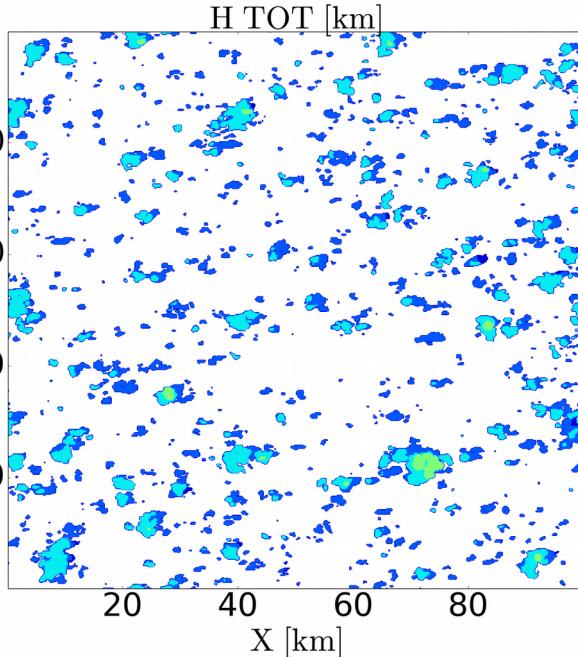
- Domaine spatial : **100 km x 100 km x 20 km**
- Domaine temporel : de 6h à 19h
- Résolution : **200 m**
- Conditions aux limites : cyclique
- Vitesse verticale de grande échelle : 1.5 cm/s

Coupe verticale d'une cellule à 18H30



III. Utilisation des LES

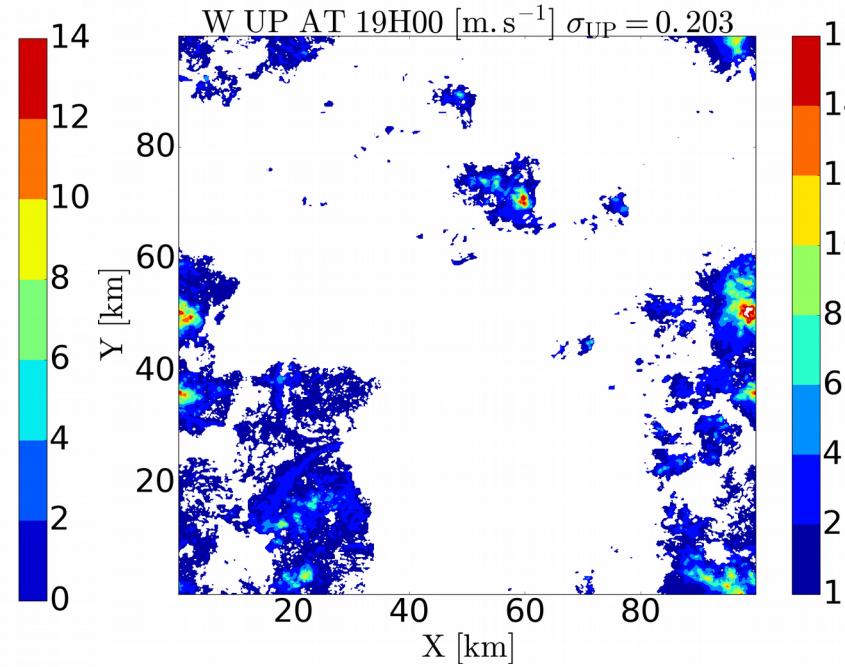
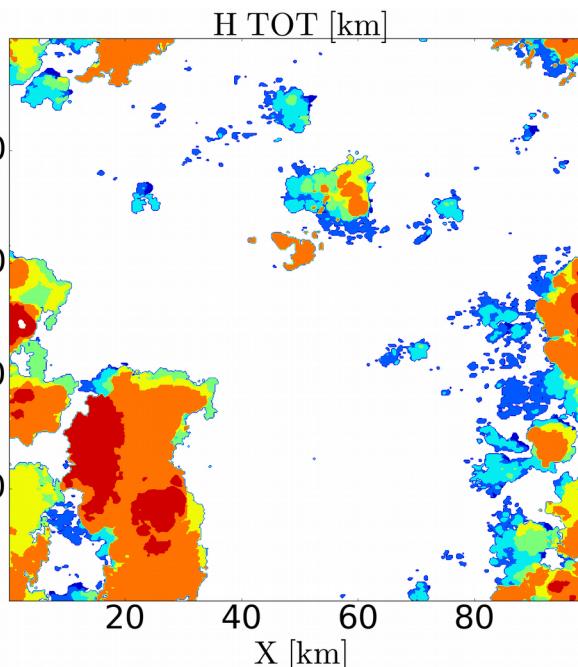
a) Approche par objet



Critère
d'agrégation :
Hclouds > 6km
Wup moyen > 1m/s

16H30

10 cellules
de rayon moyen
860 m



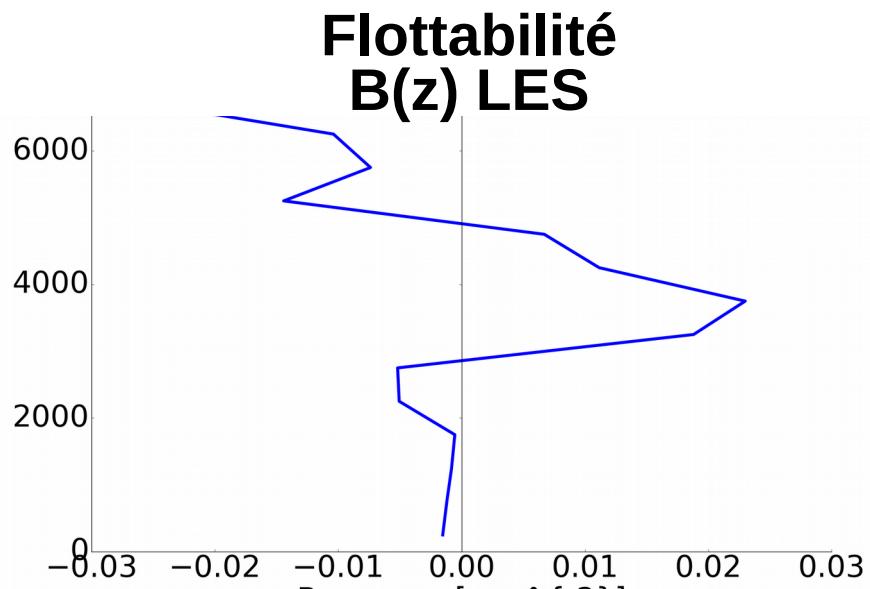
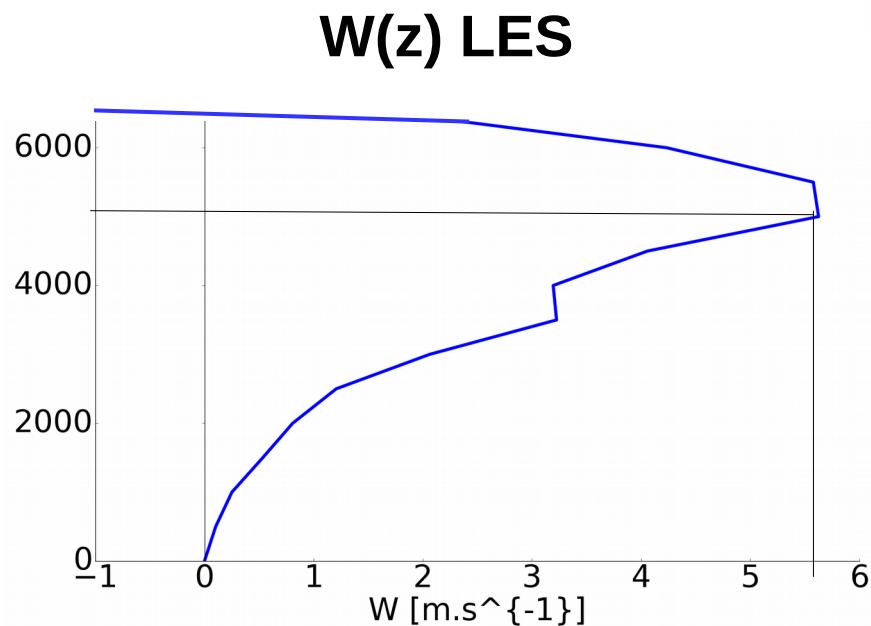
19H00

211 cellules de
rayon moyen
1510 m

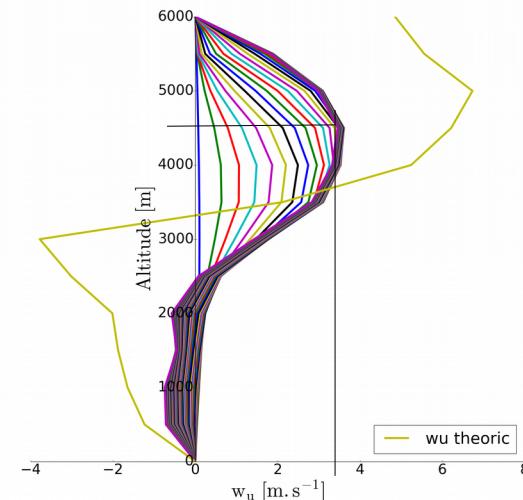
III. Utilisation des LES

a) Approche par objet

Injection de la flottabilité d'une cellule issue de la LES dans le WB 3D



$W(z)$ WB 3D

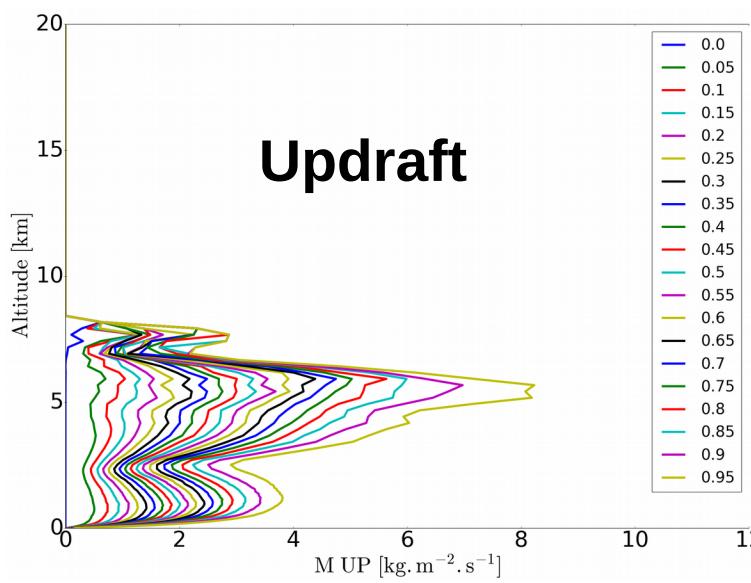
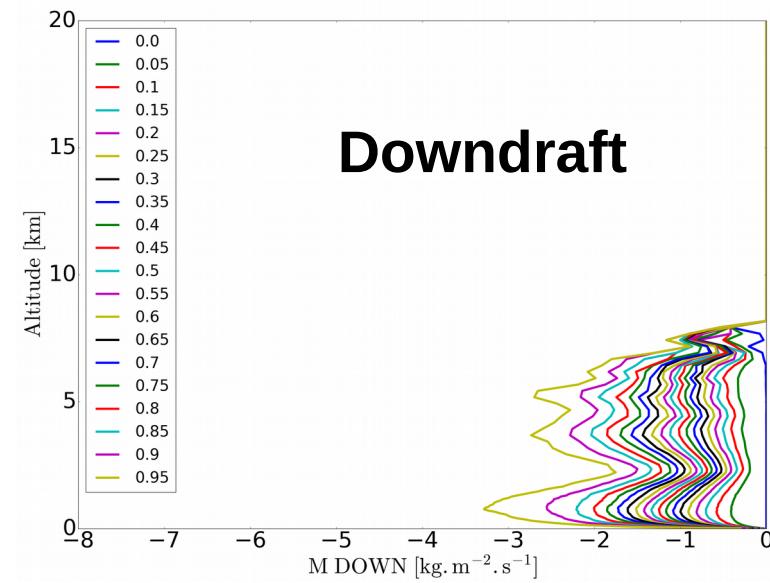


$$a = 1 \text{ km} \text{ et } b = 4.5 \text{ km} \quad (\sigma=5\%)$$

III. Utilisation des LES

b) Approche Bulk

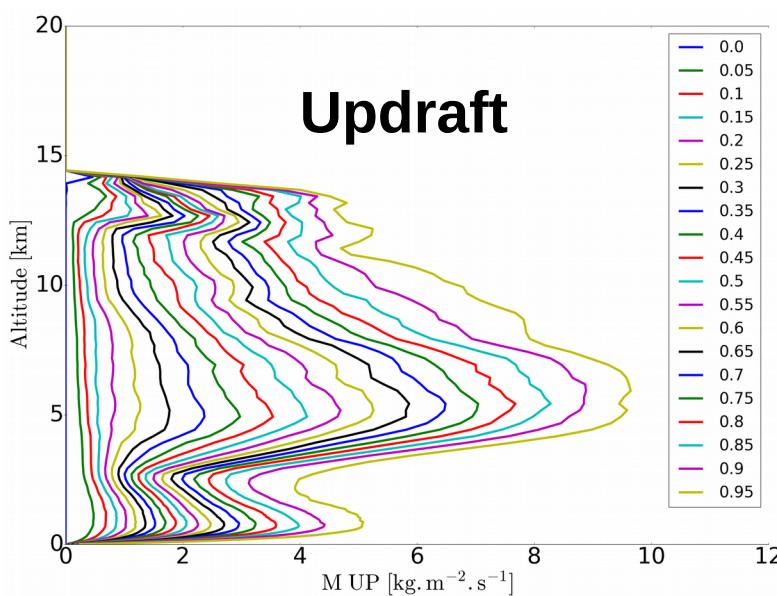
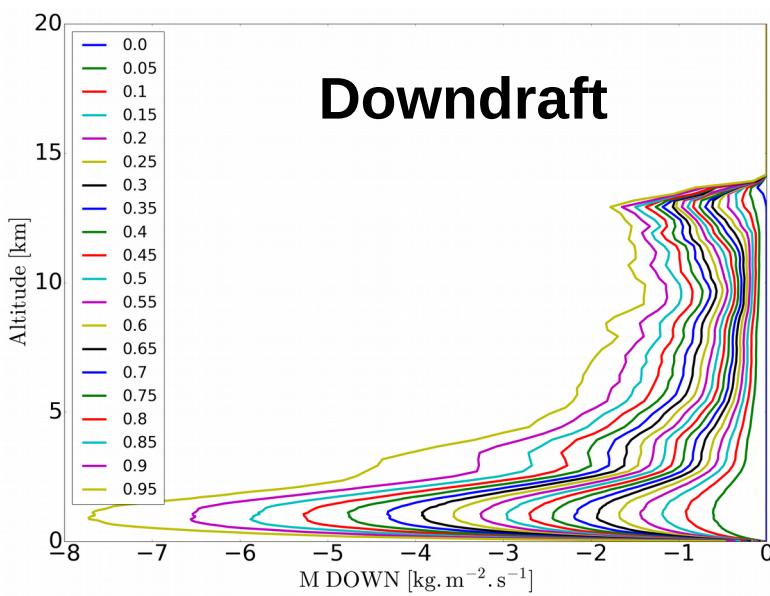
16H30



$M(z)$: Profil de flux de masse verticale

Valeur minimale pour représenter un % du flux de masse totale

19H00

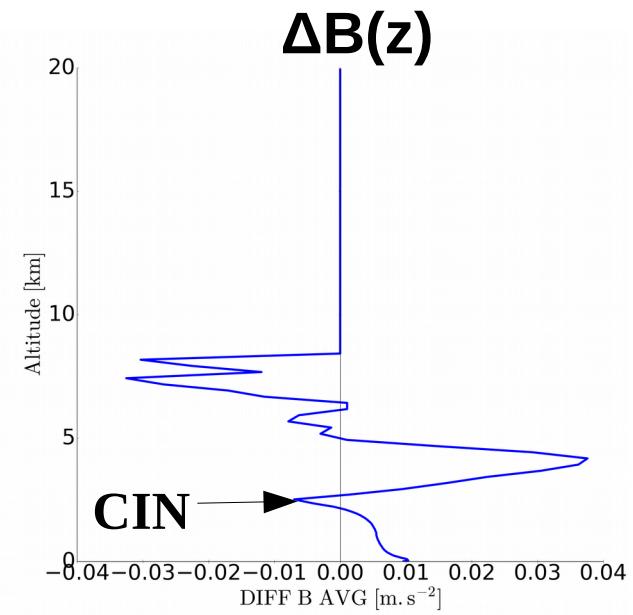
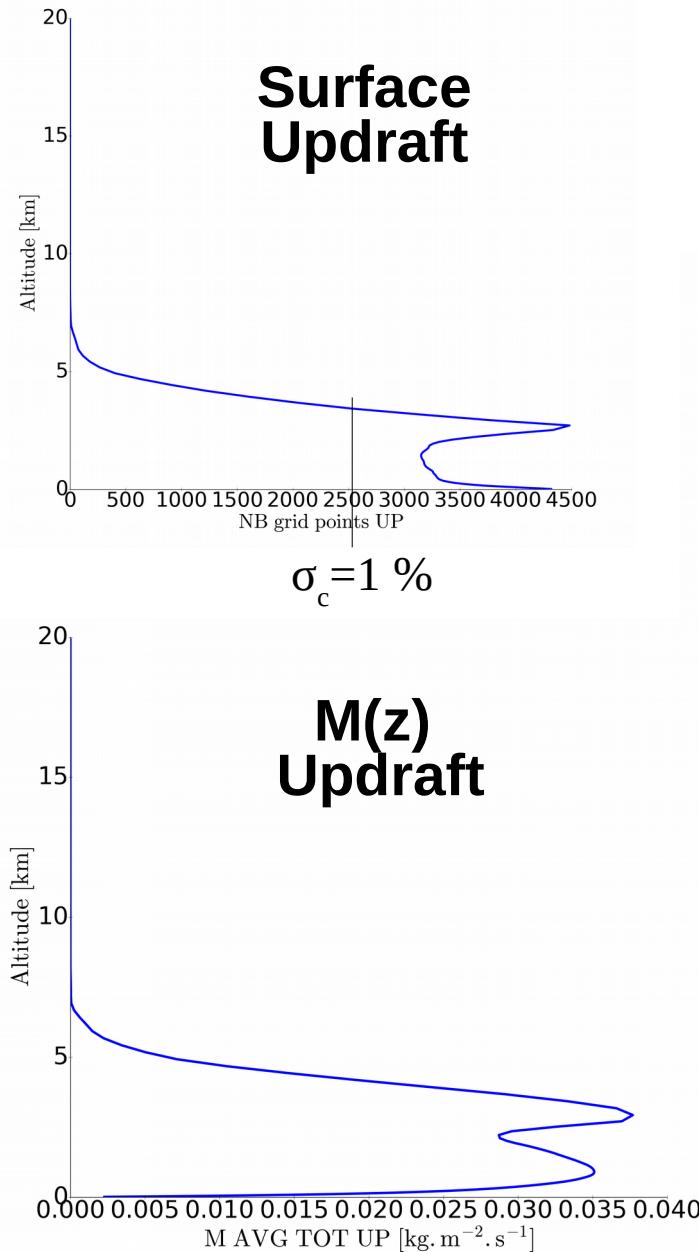
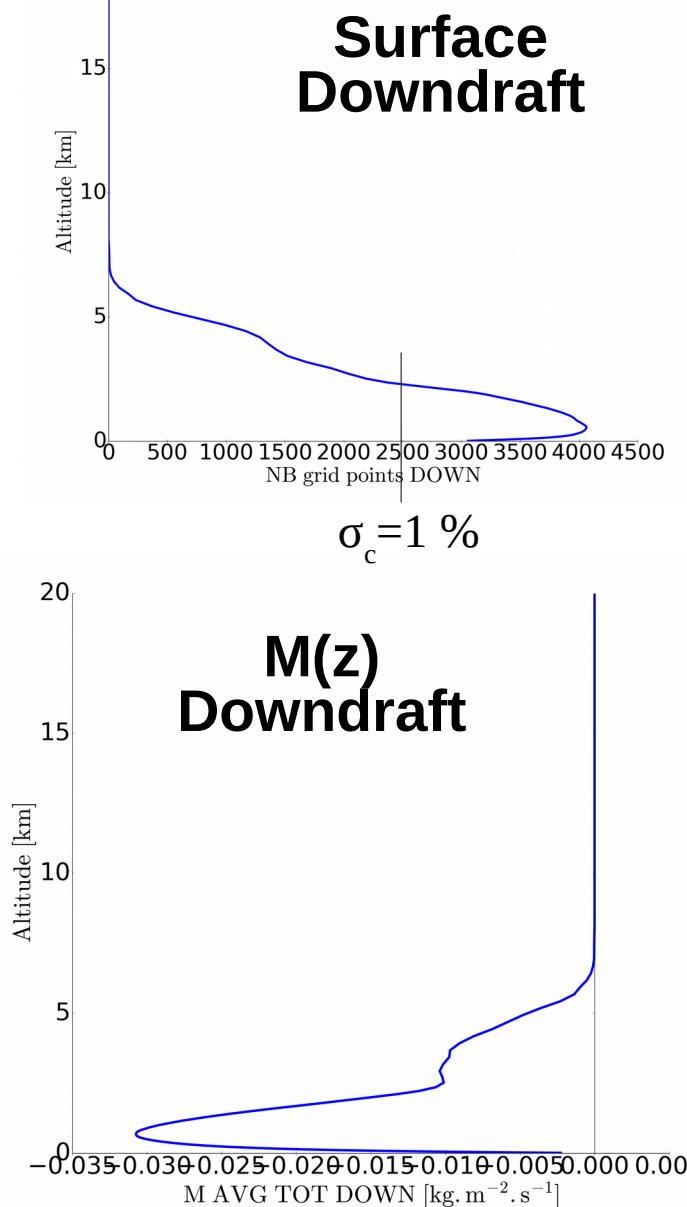


III. Utilisation des LES

b) Approche Bulk

16H30

50 % des updrafts et downdrafts les plus forts

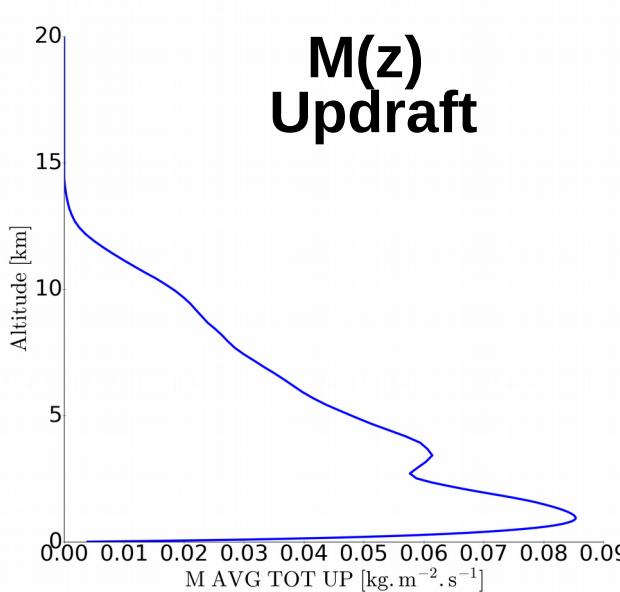
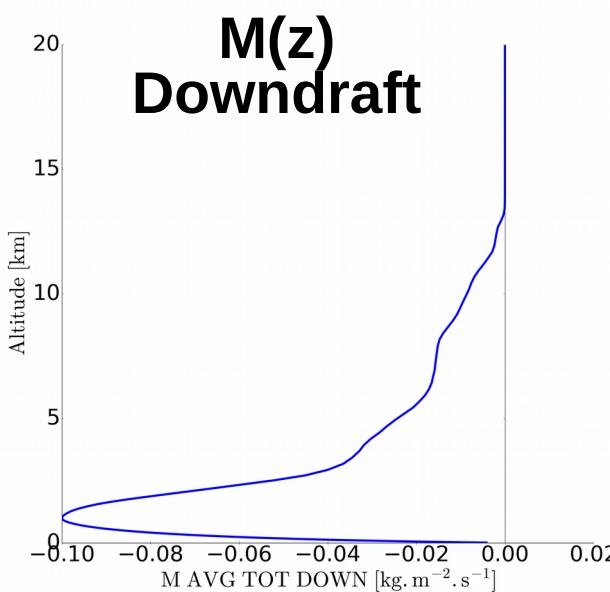
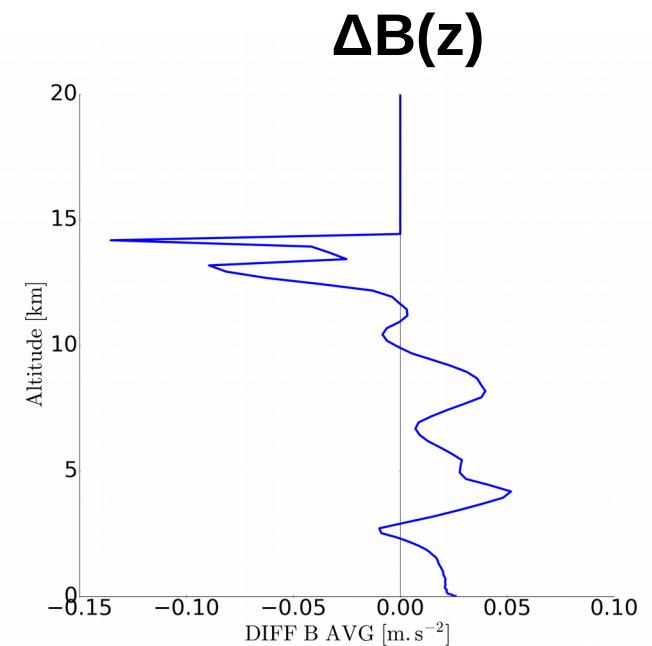
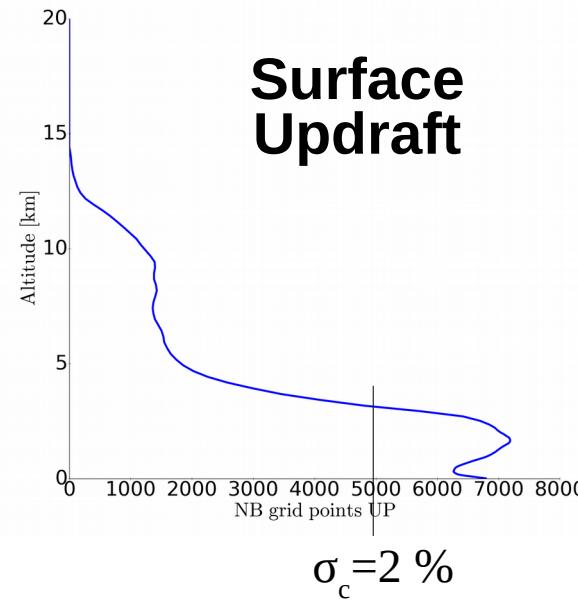
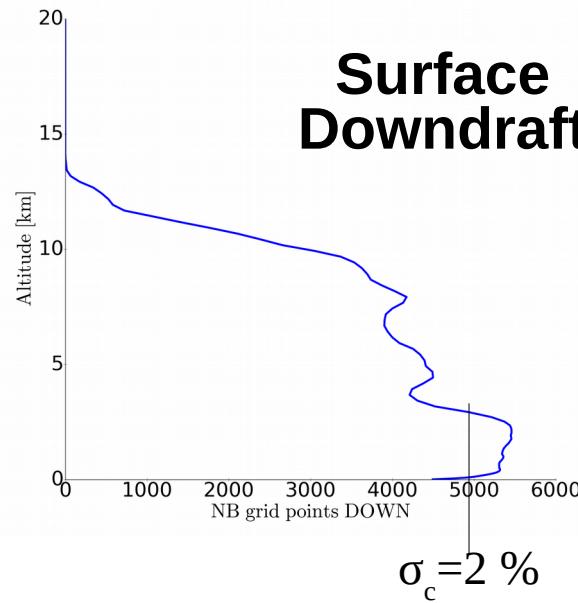


III. Utilisation des LES

b) Approche Bulk

19H00

50 % des updrafts et downdrafts les plus forts

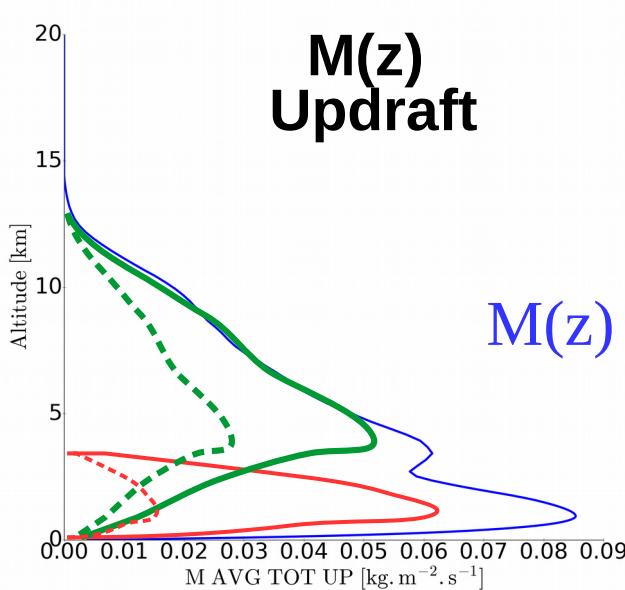
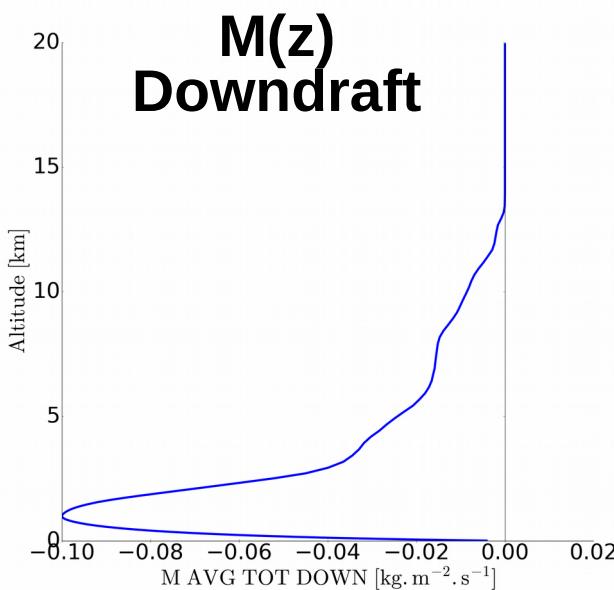
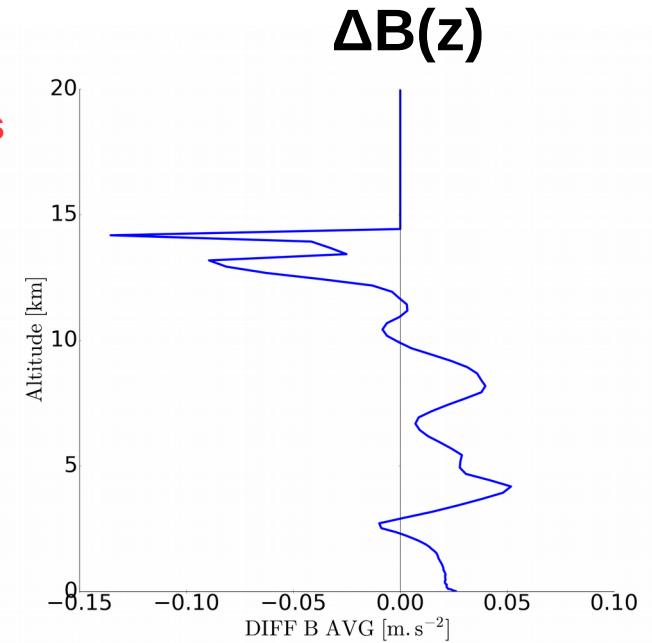
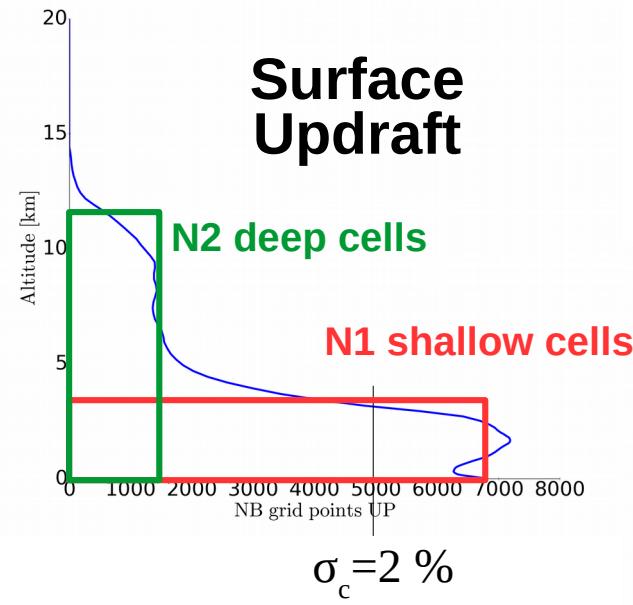
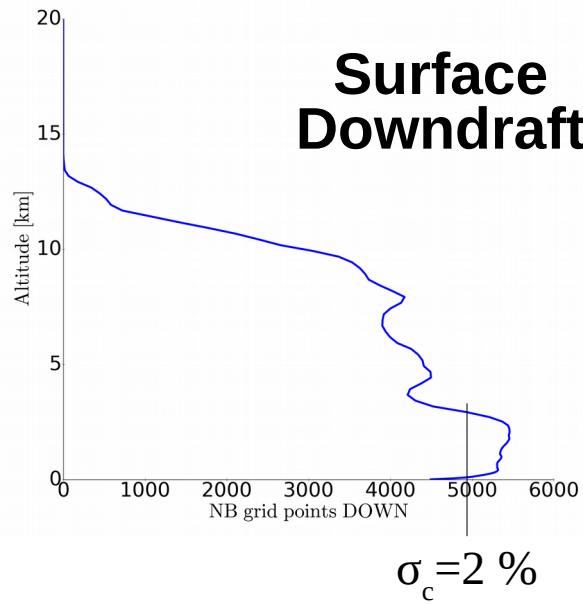


III. Utilisation des LES

b) Approche Bulk

19H00

50 % des updrafts et downdrafts les plus forts



$$M(z) = N1 M1(z) + N2 M2(z)$$

$$\begin{aligned} N1 &= 4 \\ N2 &= 2 \end{aligned}$$

IV. Conclusion et Perspectives

Conclusion

- **Modèle WB prenant en compte la pression :**
 - Temps de réponse rapide mais plus lent / PCMT
 - Meilleure représentation du sommet des nuages / PCMT (frein par B et P)
 - Passage de la barrière de CIN, via la pression
- **LES :**
 - Développement de diagnostics d'une LES, pour évaluer le WB
 - 2 approches : bulk et objets (agrégation)
 - Nécessité de prendre en compte une population de cellules convectives (au minimum 2 : shallow et deep) pour représenter le bon flux de masse.
 - Nécessité de prendre la différence de flottabilité $\Delta B(z)$ des couples updraft/downdraft.

Perspectives

- Évaluation du WB en injectant les profils de flottabilité issues de la LES : capacité à restituer les flux de masse, chaleur et humidité
- Utilisation d'une autre LES d'un cas plus humide
- Fermeture en nombre de cellules convectives.

Merci

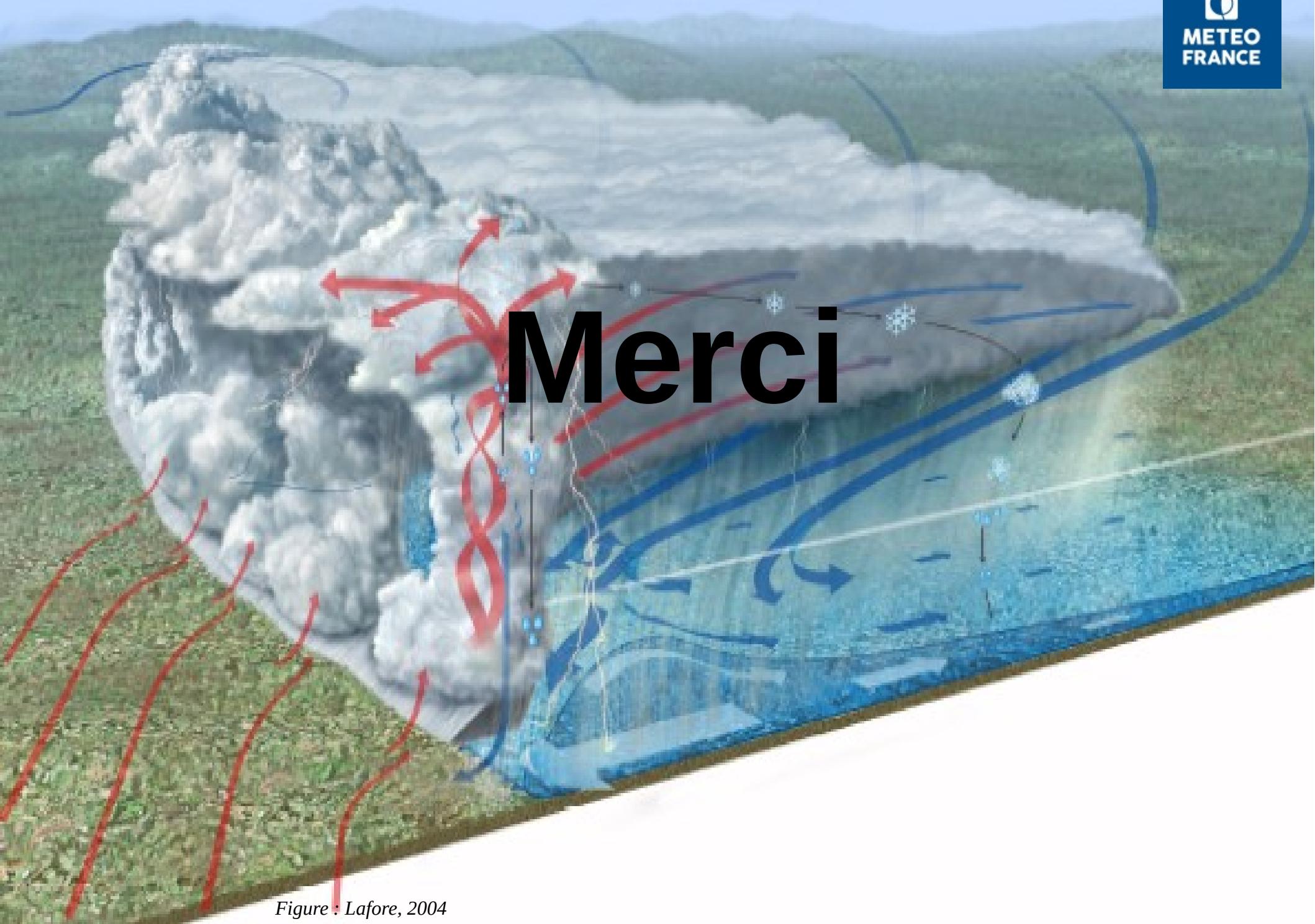
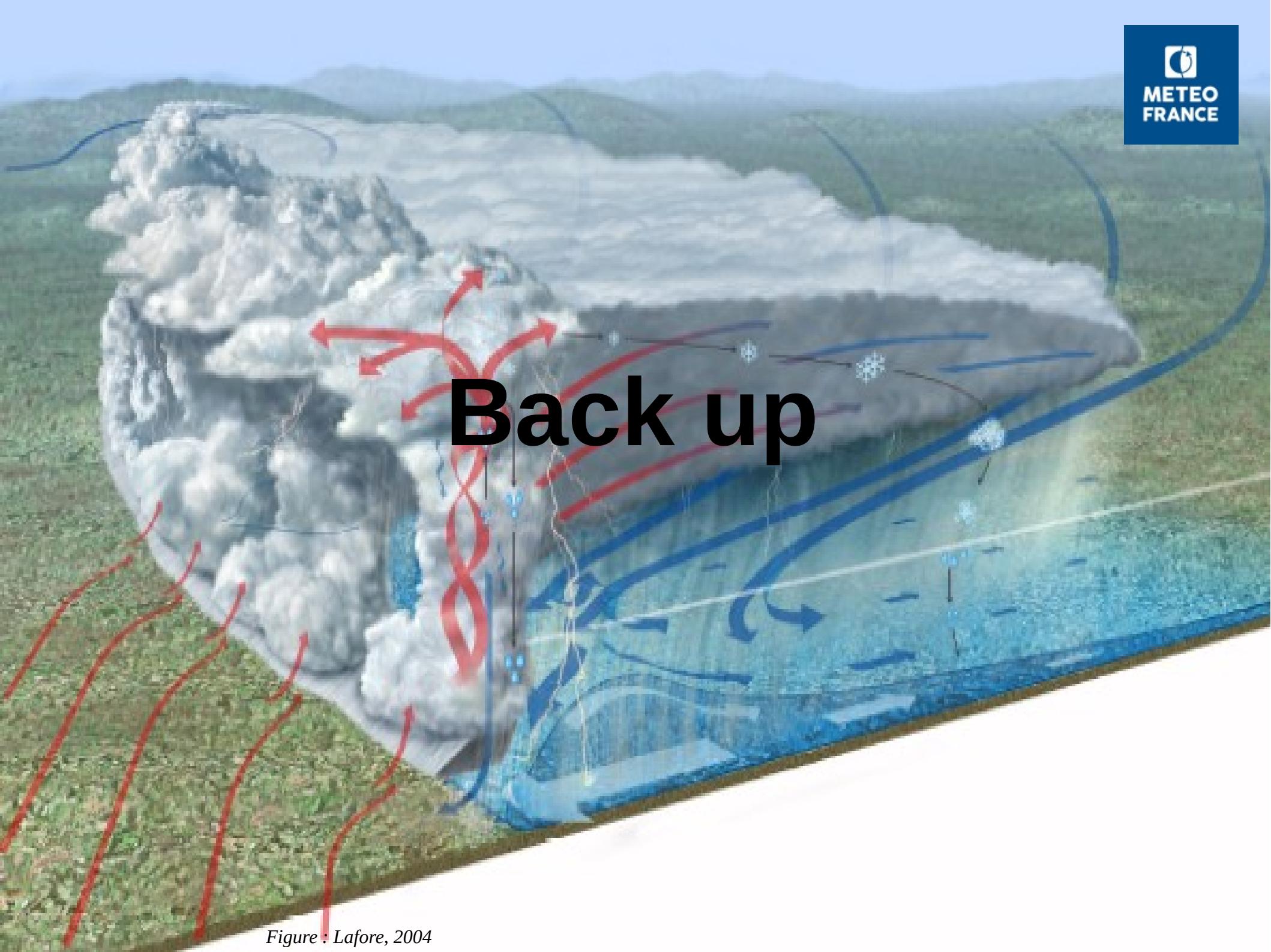


Figure : Lafore, 2004



Back up

Figure : Lafore, 2004

Équations dynamiques de l'updraft

Modèle de base SW69 (utilisé dans PCMT)

Hypothèses du modèle SW69 :

SW69

Accélération de Coriolis négligée

Air sec et inviscide

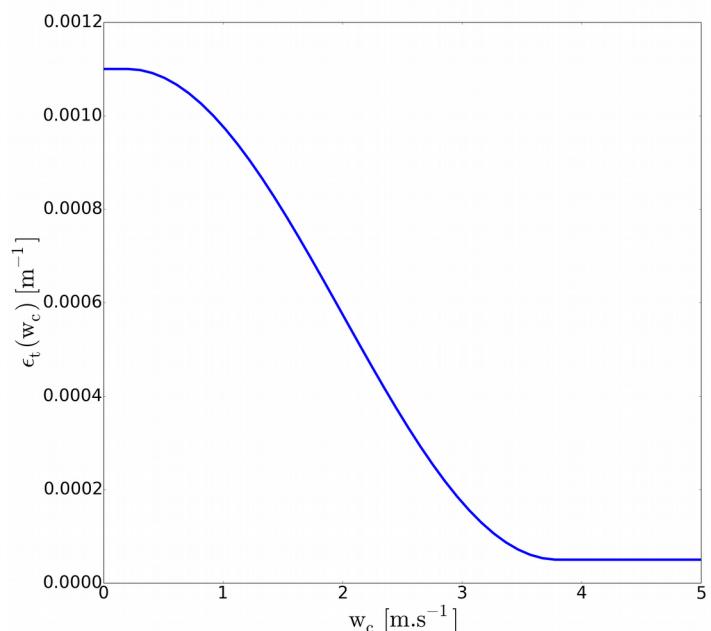
Utilisation des notions d'entraînements
et de drag

Utilisation d'un coefficient de masse virtuelle fixe : $\gamma = 0,5$

$$\frac{\partial w_c}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial w_c^2}{\partial z} + \frac{g}{1+\gamma} \frac{T'}{T_r} - (\epsilon_t + \epsilon_0 + K_d) w_c^2$$

Entrainement turbulent :

$$\epsilon_t(w_c) = \begin{cases} \epsilon_{tx} & \text{si } w_c < w_n \\ \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{w_x - w_c}{w_x - w_n} \right) & \text{si } w_n \leq w_c \leq w_x \\ \epsilon_{tn} & \text{si } w_c > w_x \end{cases}$$



Paramètre de frein aérodynamique :

$$K_d(w_c) = \begin{cases} K_{dx} & \text{si } w_c < w_n \\ \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{w_x - w_c}{w_x - w_n} \right) & \text{si } w_n \leq w_c \leq w_x \\ K_{dn} & \text{si } w_c > w_x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_{dx} &= 66 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \\ K_{dn} &= 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \\ w_{tx} &= 3.8 \text{ m.s}^{-1} \\ w_{tn} &= 0.2 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

Entrainement organisé :

$$\epsilon_o(w_c) = \mu_0^2 \max(0, \frac{1}{w_c} \frac{\partial w_c}{\partial P})$$

$$\mu_0 = \frac{S_u}{S_u - S_e} \frac{\theta_{vl,e} - \theta_{v,u}}{\theta_{vl,s} - \theta_{v,u}}$$

$S_u = q_{t,u} - q_{sl,u}$ l'excédent d'eau dans l'updraft en kg.kg^{-1} .

$S_e = q_{t,e} - q_{sl,e}$ le déficit d'eau dans l'environnement.

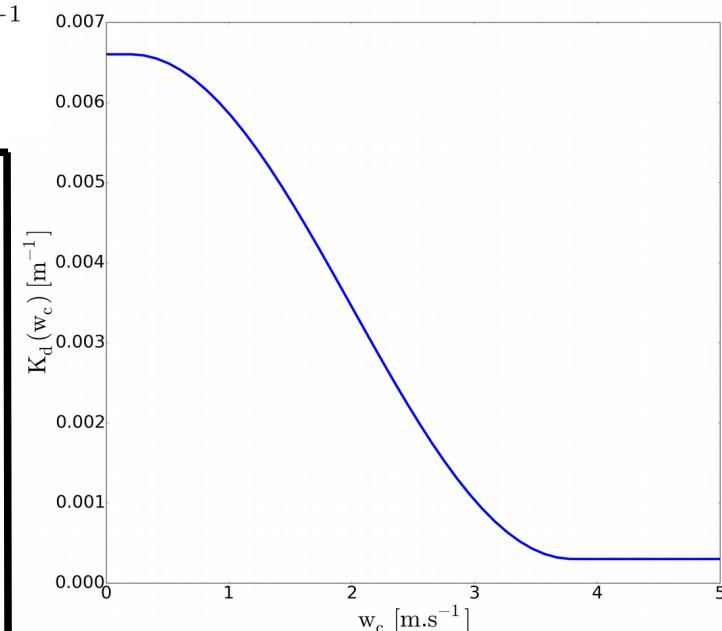
q_t le contenu en eau total.

q_{sl} le contenu de vapeur saturante par rapport à l'eau liquide.

θ_{vl} la température potentielle virtuelle liquide en K.

θ_v la température potentielle virtuelle en K.

$\theta_{vl,s}$ la température potentielle virtuelle liquide saturante en K.



Équations dynamiques de l'updraft Modèle WBCM (Water Bed Convective Model)

Hypothèses du modèle WBCM :

Système anélastique

Accélération de Coriolis négligée

Air sec et inviscide

Utilisation de 2 géométries : 2D SLAB et 3D AXIAL

WBCM2C SLAB (x,z)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P'}{\partial z} + B \\ \frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P'}{\partial x} \\ \rho_r \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_r w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

WBCM2C AXIAL (r,z)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P'}{\partial z} + B \\ \frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P'}{\partial r} \\ \frac{\rho_r}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial \rho_r w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Résolution du problème (exemple du SLAB)

Système à résoudre : $\Delta P' = A^{-1}S$ avec $\Delta P' = P_u' - P_e'$

$$A = \begin{pmatrix} -\left[\frac{1}{(z_1-z_0)(z_2^M-z_1^M)} + \frac{2}{a(b-a)}\right] & \frac{1}{(z_1-z_0)(z_2^M-z_1^M)} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{(z_2-z_1)(z_2^M-z_1^M)} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{(z_{N-2}-z_{N-3})(z_{N-1}^M-z_{N-2}^M)} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(z_{N-1}-z_{N-2})(z_{N-1}^M-z_{N-2}^M)} & -\left[\frac{1}{(z_{N-1}-z_{N-2})(z_{N-1}^M-z_{N-2}^M)} + \frac{2}{a(b-a)}\right] \end{pmatrix}$$

$$\Delta P'^n = \begin{pmatrix} \Delta P_1'^n \\ \Delta P_2'^n \\ \vdots \\ \Delta P_j'^n \\ \vdots \\ \Delta P_{N-2}'^n \\ \Delta P_{N-1}'^n \end{pmatrix}$$

$$S^n = \begin{pmatrix} \frac{b\rho_{r,1}}{a(b-a)} A_{u_i,1}^n + \frac{\overline{\rho_{r,1}}}{z_1-z_0} (A_{u,1}^n - A_{e,1}^n + \overline{B_{u,1}} - \overline{B_{e,1}}) + \frac{\epsilon_{u,1}^n - \epsilon_{e,1}^n}{\Delta t} \\ \frac{b\rho_{r,2}}{a(b-a)} A_{u_i,2}^n + \frac{\overline{\rho_{r,2}}}{z_2-z_1} (A_{u,2}^n - A_{e,2}^n + \overline{B_{u,2}} - \overline{B_{e,2}}) - \frac{\overline{\rho_{r,1}}}{z_2-z_1} (A_{u,1}^n - A_{e,1}^n + \overline{B_{u,1}} - \overline{B_{e,1}}) + \frac{\epsilon_{u,2}^n - \epsilon_{e,2}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{b\rho_{r,j}}{a(b-a)} A_{u_i,j}^n + \frac{\overline{\rho_{r,j}}}{z_j-z_{j-1}} (A_{u,j}^n - A_{e,j}^n + \overline{B_{u,j}} - \overline{B_{e,j}}) - \frac{\overline{\rho_{r,j-1}}}{z_j-z_{j-1}} (A_{u,j-1}^n - A_{e,j-1}^n + \overline{B_{u,j-1}} - \overline{B_{e,j-1}}) + \frac{\epsilon_{u,j}^n - \epsilon_{e,j}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{b\rho_{r,N-2}}{a(b-a)} A_{u_i,N-2}^n + \frac{\overline{\rho_{r,N-2}}}{z_{N-2}-z_{N-3}} (A_{u,N-2}^n - A_{e,N-2}^n + \overline{B_{u,N-2}} - \overline{B_{e,N-2}}) - \frac{\overline{\rho_{r,N-3}}}{z_{N-2}-z_{N-3}} (A_{u,N-3}^n - A_{e,N-3}^n + \overline{B_{u,N-3}} - \overline{B_{e,N-3}}) + \frac{\epsilon_{u,N-2}^n - \epsilon_{e,N-2}^n}{\Delta t} \\ \frac{b\rho_{r,N-1}}{a(b-a)} A_{u_i,N-1}^n - \frac{\overline{\rho_{r,N-2}}}{z_{N-1}-z_{N-2}} (A_{u,N-2}^n - A_{e,N-2}^n + \overline{B_{u,N-2}} - \overline{B_{e,N-2}}) + \frac{\epsilon_{u,N-1}^n - \epsilon_{e,N-1}^n}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

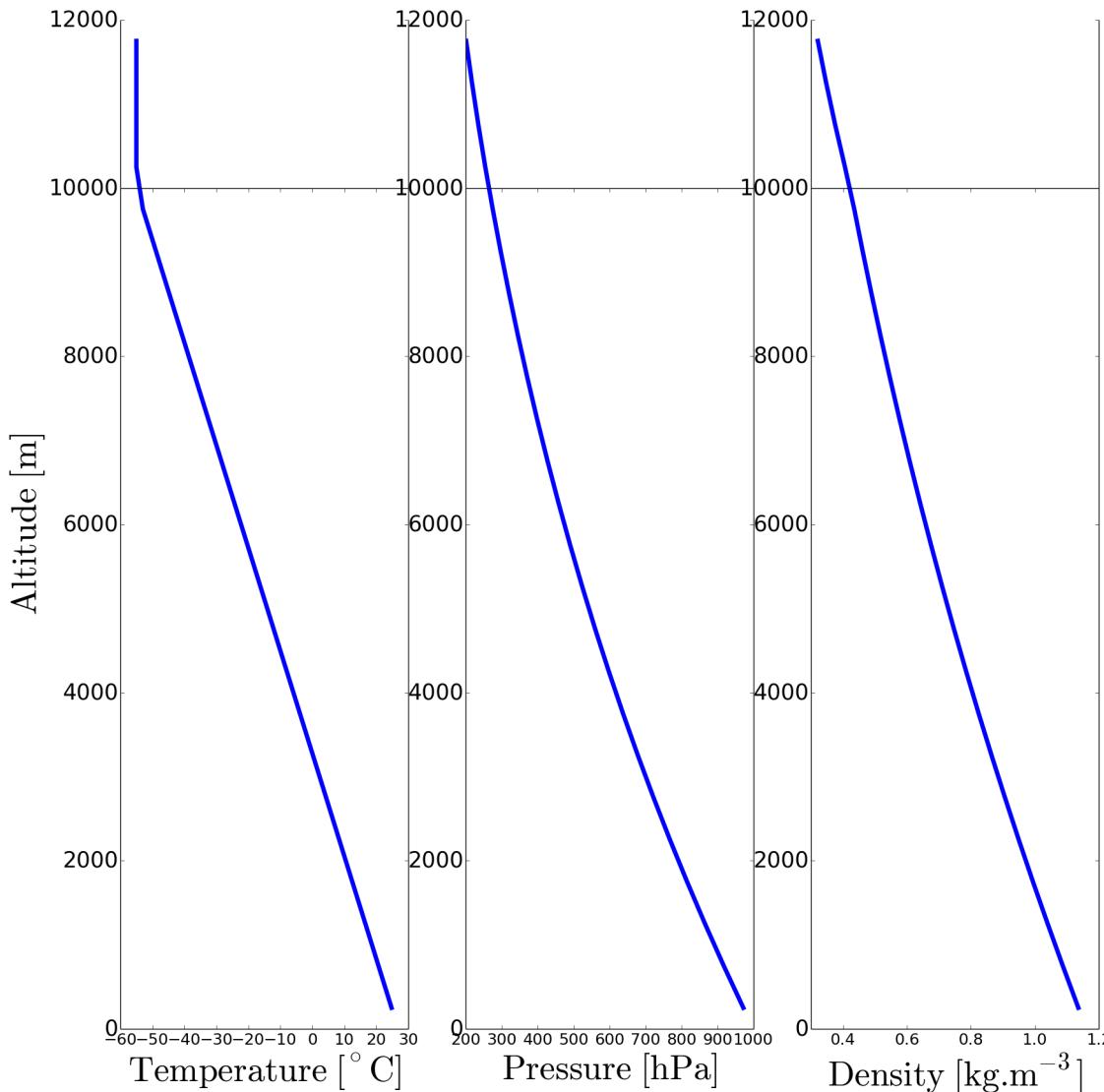
On calcul par la suite u_i :

$$u_{i,k}^{n+1} = u_{i,k}^n + \Delta t A_{u_i,k}^n + \frac{2\Delta t}{\rho_{r,k}} \left(\frac{\Delta P_k'^n}{b} \right)$$

Et on en déduit les vitesses verticales via les équations de continuité :

$$\begin{cases} w_{u,k}^{n+1} = \frac{\overline{\rho_{r,k-1}}}{\overline{\rho_{r,k}}} w_{u,k-1}^{n+1} - \frac{\rho_{r,k}}{\overline{\rho_{r,k}}} (z_k - z_{k-1}) \frac{u_{i,k}^{n+1}}{a} \\ w_{e,k}^{n+1} = \frac{\overline{\rho_{r,k-1}}}{\overline{\rho_{r,k}}} w_{e,k-1}^{n+1} - \frac{\rho_{r,k}}{\overline{\rho_{r,k}}} (z_k - z_{k-1}) \frac{u_{F,k} - u_{i,k}^{n+1}}{b-a} \end{cases}$$

Profils de référence



si $z > z_{\text{EL}}$

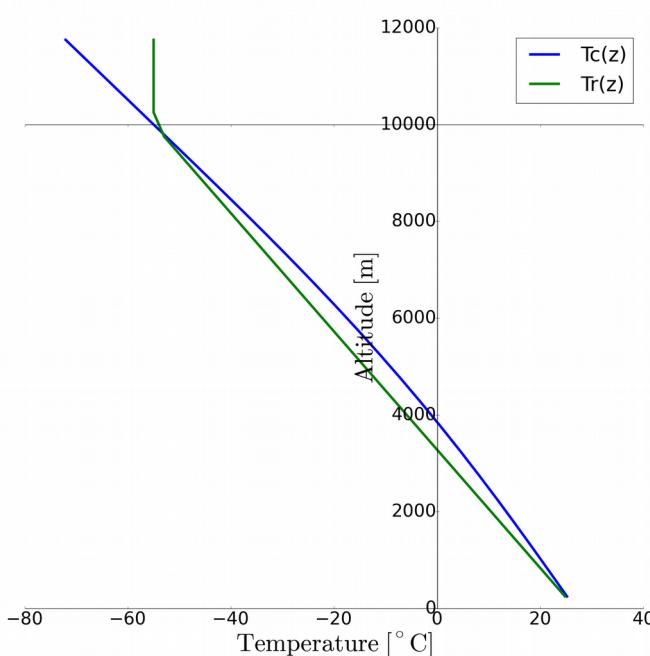
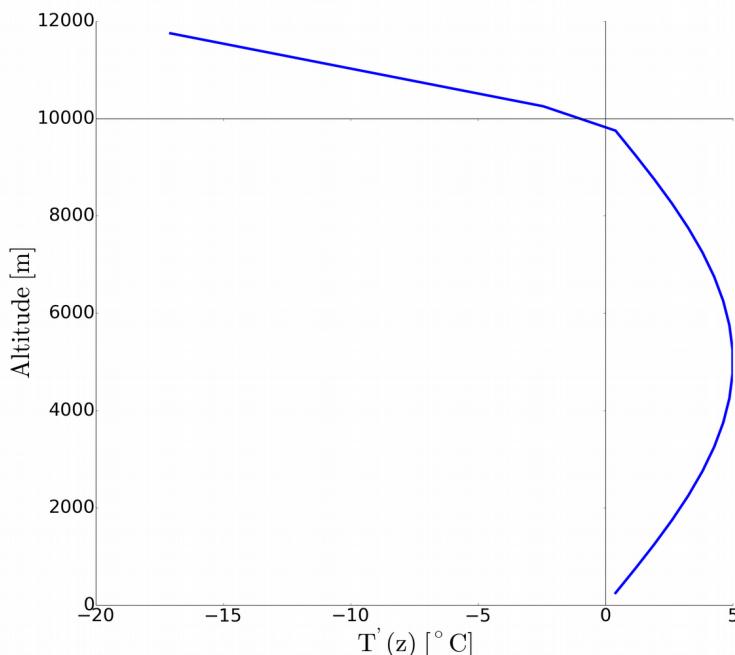
$$\left\{ \begin{array}{l} T_r(z) = T_r(z_{\text{EL}}) \left(1 + \frac{\beta_2}{T_r(z_{\text{EL}})} (z - z_{\text{EL}}) \right) \\ P_r(z) = P_r(z_{\text{EL}}) \left(1 + \frac{\beta_2}{T_r(z_{\text{EL}})} (z - z_{\text{EL}}) \right)^{-\frac{g}{R_a \beta_2}} \\ \rho_r(z) = \rho_r(z_{\text{EL}}) \left(1 + \frac{\beta_2}{T_r(z_{\text{EL}})} (z - z_{\text{EL}}) \right)^{-\frac{g}{R_a \beta_2} - 1} \end{array} \right.$$

si $0 < z < z_{\text{EL}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_r(z) = T_r(z_0) \left(1 + \frac{\beta_1}{T_r(z_0)} (z - z_0) \right) \\ P_r(z) = P_r(z_0) \left(1 + \frac{\beta_1}{T_r(z_0)} (z - z_0) \right)^{-\frac{g}{R_a \beta_1}} \\ \rho_r(z) = \rho_r(z_0) \left(1 + \frac{\beta_1}{T_r(z_0)} (z - z_0) \right)^{-\frac{g}{R_a \beta_1} - 1} \end{array} \right.$$

Atmosphère de référence :
 - hydrostatique
 - au repos

Profils de référence



$$\begin{cases} T_r(z) = T_r(z_{EL}) + \beta_2(z - z_{EL}) \\ T_c(z) = T_r(z_{EL}) - \frac{g}{Cp}(z - z_{EL}) \\ T'(z) = -\left(\frac{g}{Cp} + \beta_2\right)(z - z_{EL}) \end{cases} \quad si \ z > z_{EL}$$

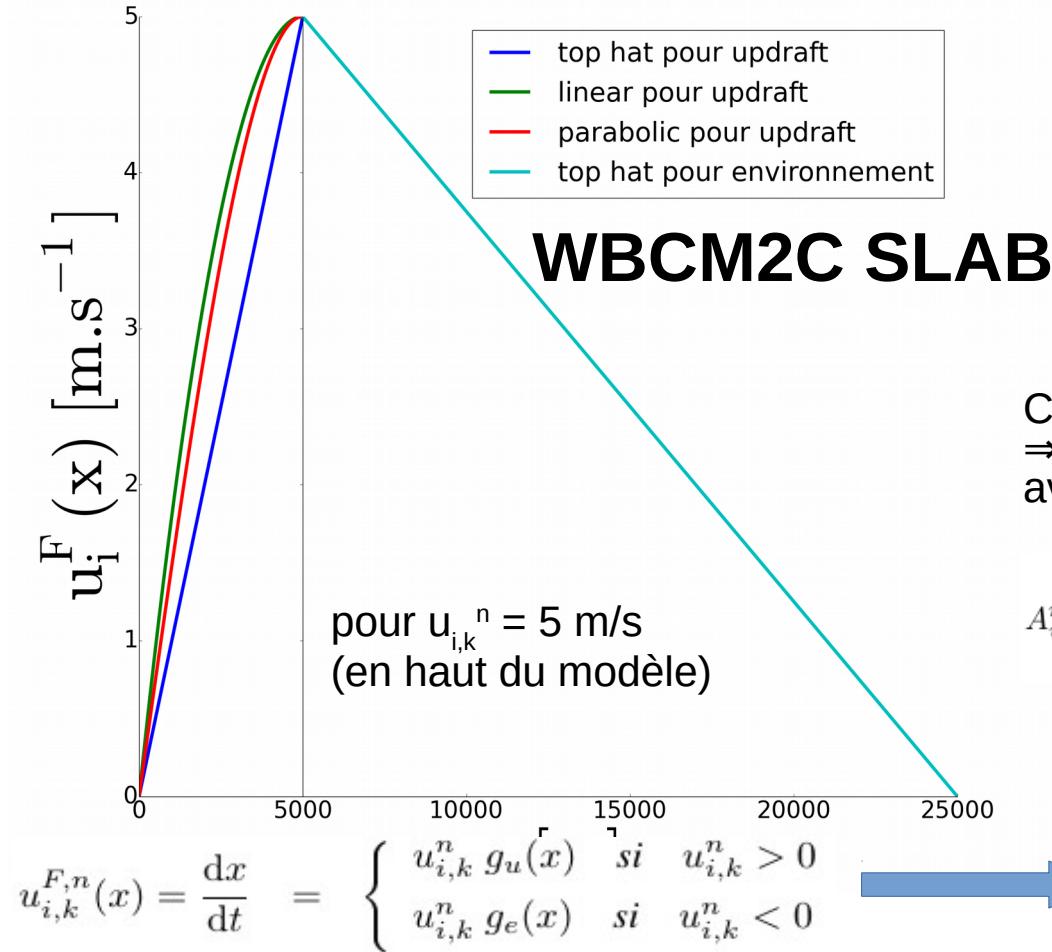
$$\begin{cases} T_r(z) = T_r(z_0) + \beta_1(z - z_0) \\ T'(z) = \Delta T_{max} \sin\left(\frac{\pi z}{z_{EL}}\right) \\ T_c(z) = T_r(z) + T'(z) \end{cases} \quad si \ 0 \leq z \leq z_{EL}$$

Hypothèses :

- Profil de flottabilité fixé
- Particule suit le gradient adiabatique sec dans la stratosphère

$$\beta_1 = \frac{\pi \Delta T_{max}}{z_{EL}} - \frac{g}{Cp}$$

Traitement de l'advection horizontale de u



- Introduction de **facteurs de forme** pour u_i :
- ⇒ Les fonctions $g_u(x)$, $g_e(x)$ dépendent de $f_u(x)$ et $f_e(x)$

$$g_u(x) = \frac{1}{a} \int_0^x f_u(x') dx' \quad \text{avec } g_u(a) = g_e(a) = 1$$

$$g_e(x) = 1 + \frac{u_{F,k} - u_{i,k}}{u_{i,k}^n(b-a)} \int_a^x f_e(x') dx'$$

Comme Résolution horizontale << Résolution verticale
⇒ Traitement lagrangien de l'advection horizontale de u avec schéma upstream

$$A_{u_i,k}^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\text{advection}} = \frac{u_{i,k}^{F,n+1}(a) - u_{i,k}^{F,n}(a)}{\Delta t} = \frac{u_{i,k}^{F,n}(x^L) - u_{i,k}^{F,n}(a)}{\Delta t}$$

$$= \begin{cases} \frac{u_{i,k}^n}{\Delta t} (g_u(x^L) - 1) & \text{si } u_{i,k}^n > 0 \\ \frac{u_{i,k}^n}{\Delta t} (g_e(x^L) - 1) & \text{si } u_{i,k}^n < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{x^L}^a \frac{dx}{g_u(x)} = u_{i,k}^n \Delta t & \text{si } u_{i,k}^n > 0 \\ \int_{x^L}^a \frac{dx}{g_e(x)} = u_{i,k}^n \Delta t & \text{si } u_{i,k}^n < 0 \end{cases}$$

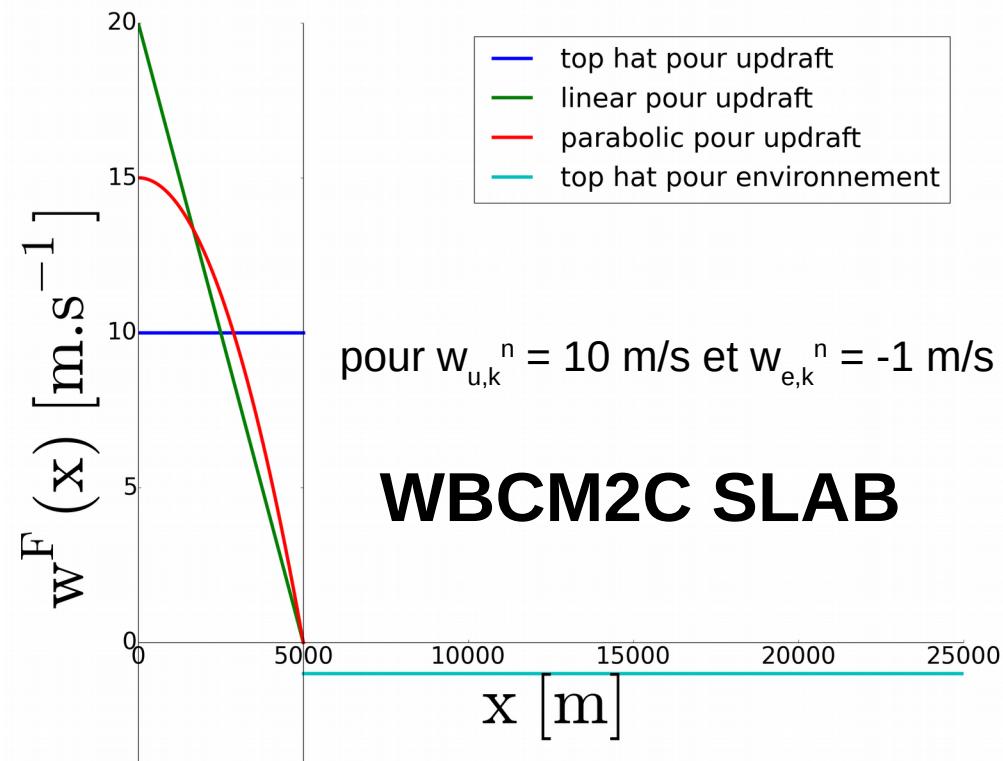
Top hat : $f_u(x) = 1 \iff g_u(x) = \frac{x}{a} \implies x^L = ae^{-\frac{u_{i,k}^n}{a} \Delta t} \implies g_u(x^L) = e^{-\frac{u_{i,k}^n}{a} \Delta t}$

Linéaire : $f_u(x) = -\frac{2}{a}x + 2 \iff g_u(x) = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} \implies x^L = \frac{2a}{1 + e^{\frac{2u_{i,k}^n}{a} \Delta t}} \implies g_u(x^L) = \frac{2}{\cosh(\frac{2u_{i,k}^n}{a} \Delta t) + 1}$

Parabolique : $f_u(x) = -\frac{3}{2a^2}x^2 + \frac{3}{2} \iff g_u(x) = -\frac{x^3}{2a^3} + \frac{3x}{2a} \implies x^L = \sqrt{\frac{3a^2}{1 + 2e^{\frac{3u_{i,k}^n}{a} \Delta t}}} \implies g_u(x^L) = 3\sqrt{3} \left(2e^{\frac{u_{i,k}^n}{a} \Delta t} + e^{-\frac{2u_{i,k}^n}{a} \Delta t} \right)^{-\frac{3}{2}}$

Top hat : $f_e(x) = 1 \text{ et } u_{F,k} = 0 \iff g_e(x) = \frac{b-x}{b-a} \implies x^L = b - (b-a)e^{\frac{u_{i,k}^n}{b-a} \Delta t} \implies g_e(x^L) = e^{\frac{u_{i,k}^n}{b-a} \Delta t}$

Traitement des advections de vitesses verticales



- Introduction de **facteurs de forme** pour le w_u et w_e et donc pour u_i :
- ⇒ Donner un certain profil dépendant de x à u_i , w_u et w_e via des fonctions $g_u(x)$, $g_e(x)$, $f_u(x)$ et $f_e(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,k}^{F,n}(x) = u_{i,k}^n \times g_u(x) \text{ avec } g_u(0) = 0 \\ w_{u,k}^{F,n}(x) = w_{u,k}^n \times f_u(x) \end{array} \right. \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \int_0^a f_u(x) dx = 1 \\ \frac{1}{b-a} \int_a^b f_e(x) dx = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,k}^{F,n}(x) = u_{i,k}^n \times g_e(x) \text{ avec } g_e(a) = g_u(a) \\ w_{e,k}^{F,n}(x) = w_{e,k}^n \times f_e(x) \end{array} \right.$$

Hypothèses pour $f_u(x)$: top hat, linéaire, parabolique

Hypothèses pour $f_e(x)$: top hat

$$A_{u,k}^n = -\frac{1}{a} \int_0^a \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)_k^n dx = -C_{u1} \frac{u_{i,k}^n w_{u,k}^n}{a} - C_{u2} \frac{1}{2} \frac{w_{u,k}^n{}^2 - w_{u,k-1}^n{}^2}{z_k^M - z_{k-1}^M}$$

$$A_{e,k}^n = -\frac{1}{b-a} \int_a^b \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)_k^n dx = -C_{e1} \frac{u_{i,k}^n w_{e,k}^n}{b-a} - C_{e2} \frac{w_{e,k}^n (u_{F,k} - u_{i,k}^n)}{b-a} - C_{e3} \frac{1}{2} \frac{w_{e,k+1}^n{}^2 - w_{e,k}^n{}^2}{z_{k+1}^M - z_k^M}$$

Top hat : $f_u(x) = 1 \leftrightarrow C_{u1} = 0$ et $C_{u2} = 1 \rightarrow$ Advection de w par u nulle

Linéaire : $f_u(x) = -\frac{2}{a}x + 2 \leftrightarrow C_{u1} = -\frac{4}{3}$ et $C_{u2} = \frac{4}{3} \rightarrow$ 33 % supplémentaire

Parabolique : $f_u(x) = -\frac{3}{2a^2}x^2 + \frac{3}{2} \leftrightarrow C_{u1} = -\frac{6}{5}$ et $C_{u2} = \frac{6}{5} \rightarrow$ 20 % supplémentaire

Top hat : $f_e(x) = 1 \leftrightarrow C_{e1} = 0$, $C_{e2} = 0$ et $C_{e3} = 1 \rightarrow$ Advection de w par u nulle