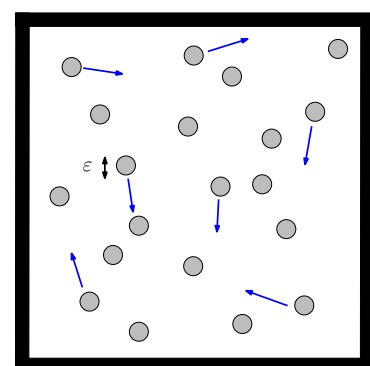


# Résultats mathématiques plus ou moins récents autour des équations de Navier-Stokes

Ateliers de Modélisation de l'Atmosphère, Toulouse, 17-20 mars 2026



**Isabelle Gallagher, Université Paris Cité**

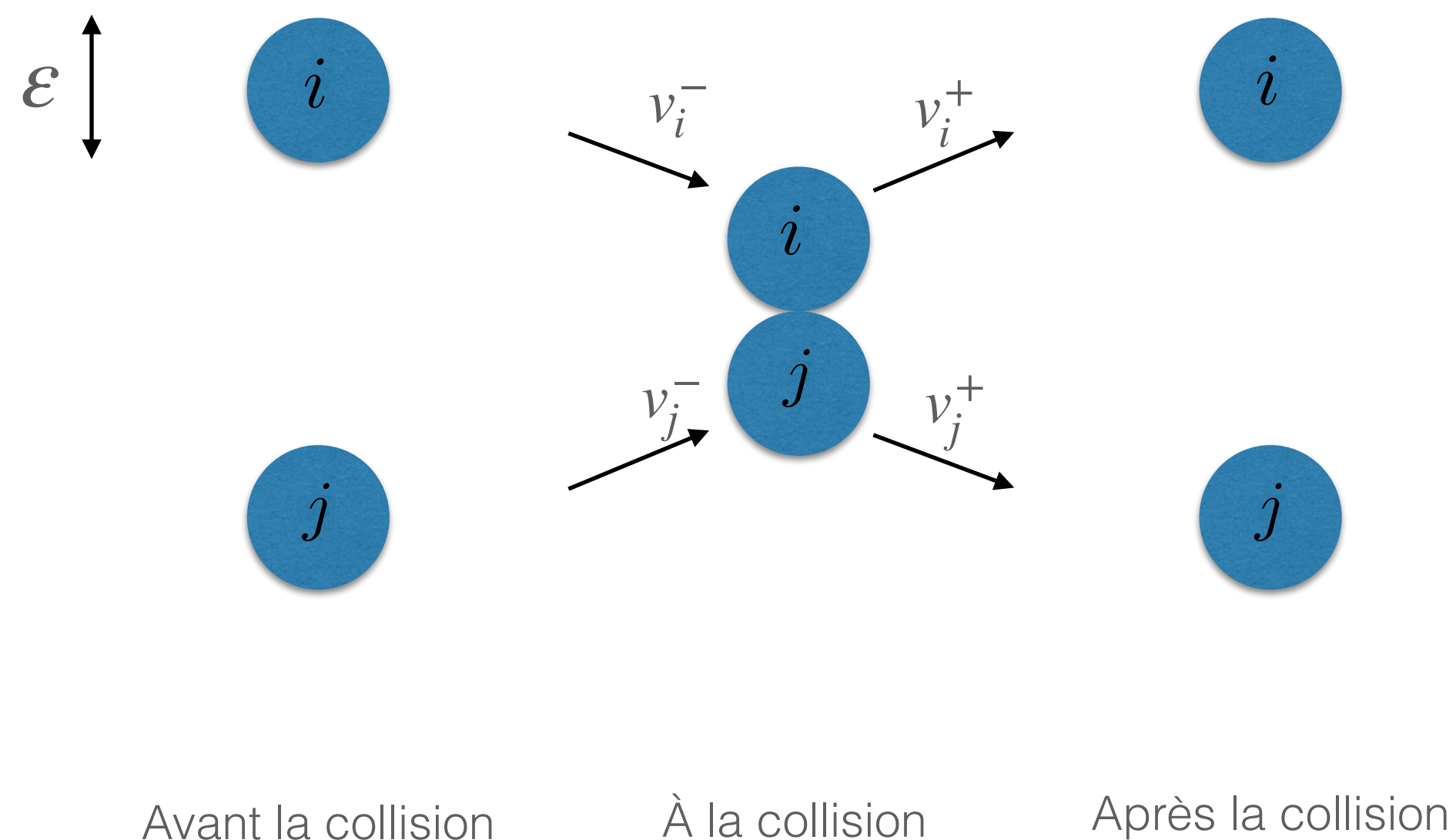
## Plan de l'exposé

- Sur une justification rigoureuse des équations de Navier-Stokes à partir de modèles déterministes de particules (sphères dures, gaz dilués)
- Sur la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles

# Description microscopique d'un gaz

On considère un gaz constitué de  $N$  particules identiques (des sphères dures).

Le système suit les *lois de Newton*, qui forment un gigantesque système d'équations différentielles ordinaires :



$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = 0$$

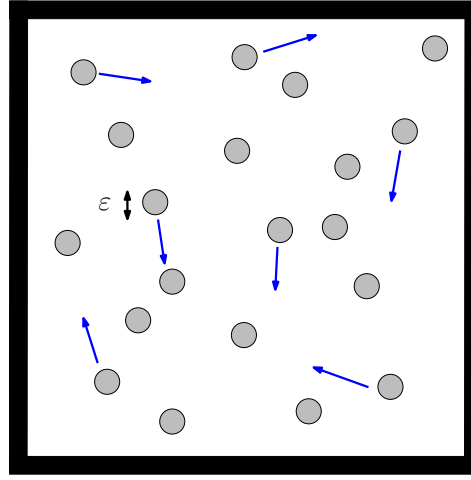
$$v_i^+ := v_i^- - (v_i^- - v_j^-) \cdot \omega \omega,$$

$$v_j^+ := v_j^- + (v_i^- - v_j^-) \cdot \omega \omega$$

$$v_i^- + v_j^- = v_i^+ + v_j^+ \quad |v_i^-|^2 + |v_j^-|^2 = |v_i^+|^2 + |v_j^+|^2$$

# Limites hydrodynamiques

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$



D. Hilbert  
(1862-1943)

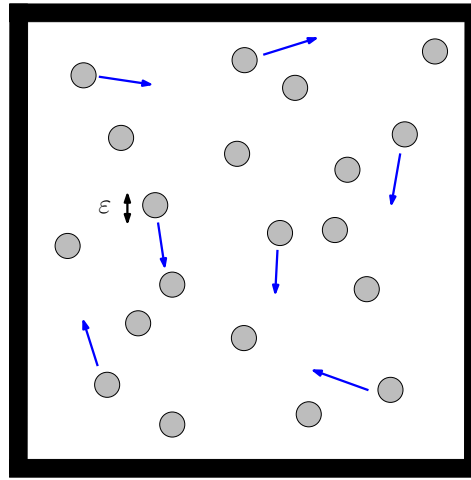


Dynamique moléculaire

Hydrodynamique

# Limites hydrodynamiques

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$



C.B. Morrey  
(1907-1984)



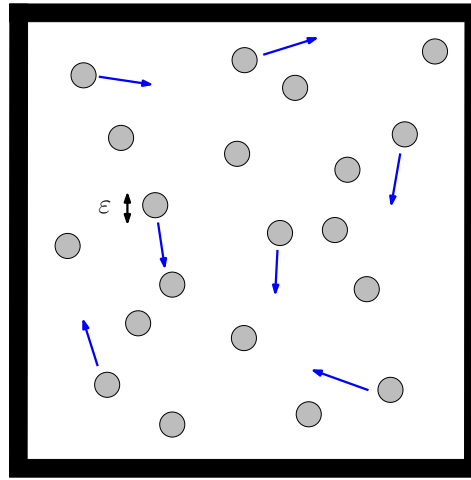
Dynamique moléculaire

Hydrodynamique

$$N\varepsilon^d = 1$$

# Limites hydrodynamiques

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$



Dynamique moléculaire



C.B. Morrey  
(1907-1984)

Très peu de résultats sont connus, sauf si l'on rajoute du bruit dans le système

*Olla-Varadhan-Yau '93, Esposito-Marra-Yau '96*

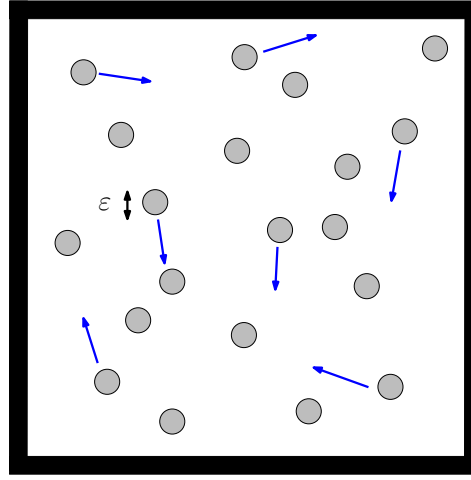
$$N\varepsilon^d = 1$$

Hydrodynamique



# Limites hydrodynamiques

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad \alpha \rightarrow 0$$



H. Grad  
(1923-1986)



C. Cercignani  
(1939-2010)



Dynamique moléculaire

$tv$

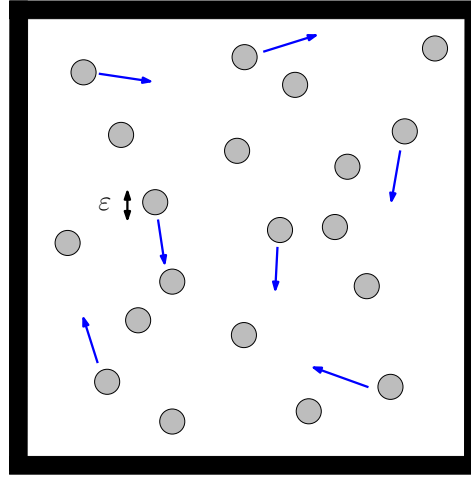


$$N\varepsilon^{d-1} = 1/\alpha$$

Hydrodynamique

# Limites hydrodynamiques

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad \alpha \rightarrow 0$$



H. Grad  
(1923-1986)



C. Cercignani  
(1939-2010)



Dynamique moléculaire

Théorie cinétique

Hydrodynamique

$$N\varepsilon^{d-1} = 1/\alpha$$

$$\alpha \rightarrow 0$$

# Limites hydrodynamiques

## Euler compressible

*Cafisch '80*

*Lachowicz '87*



## Navier-Stokes incompressible

*De Masi, Esposito, Lebowitz '90*

*Bardo, Ukai '91*

*Golse, Saint-Raymond '04*

*G, Tristani '20*

*Carrapatoso, G, Tristani '25*

Théorie cinétique

Hydrodynamique

$\alpha \rightarrow 0$

# **Première partie : des particules vers Boltzmann**

## Un niveau intermédiaire : le mésoscopique

On cherche à caractériser l'état d'un gaz par

$f(t, x, v) dx dv :=$  proportion de particules à la position  $x + dx$  et la vitesse  $v + dv$  à l'instant  $t$

Cette fonction ne peut pas être mesurée, mais des **quantités mesurables** peuvent être obtenues en prenant des moyennes :

$$R(t, x) := \int f(t, x, v) dv, \quad U(t, x) := \int f(t, x, v) v dv, \quad \Theta(t, x) := \int f(t, x, v) |v|^2 dv.$$

# Les équations mésoscopiques



Ludwig Boltzmann a établi en 1872 que cette fonction vérifie l'équation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f)$$

$$Q(f, f)(v) := \iint (f(v')f(v'_1) - f(v)f(v_1)) ((v - v_1) \cdot \omega)_+ dv_1 d\omega$$

$$v' := v - (v - v_1) \cdot \omega \omega, \quad v'_1 := v_1 + (v - v_1) \cdot \omega \omega$$

# Les équations mésoscopiques



Ludwig Boltzmann a établi en 1872 que cette fonction vérifie l'équation

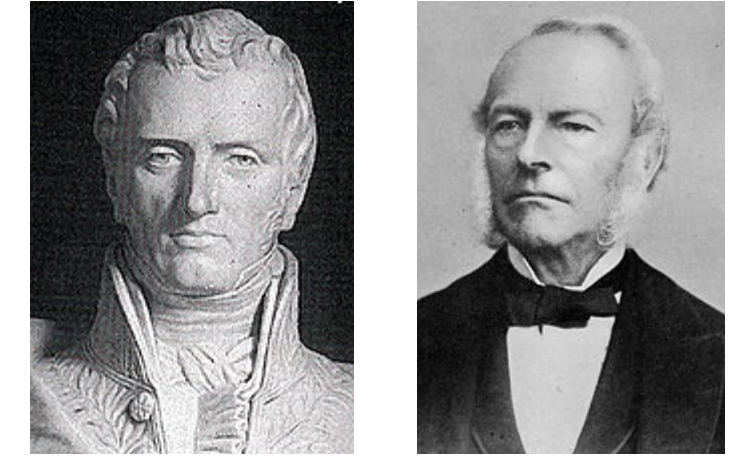
$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f)$$

$$Q(f, f)(v) := \iint (f(v')f(v'_1) - f(v)f(v_1)) ((v - v_1) \cdot \omega)_+ dv_1 d\omega$$

$$v' := v - (v - v_1) \cdot \omega \omega, \quad v'_1 := v_1 + (v - v_1) \cdot \omega \omega$$

**Question 1** : peut-on obtenir rigoureusement cette équation à partir des équations de Newton ?

# Les équations macroscopiques

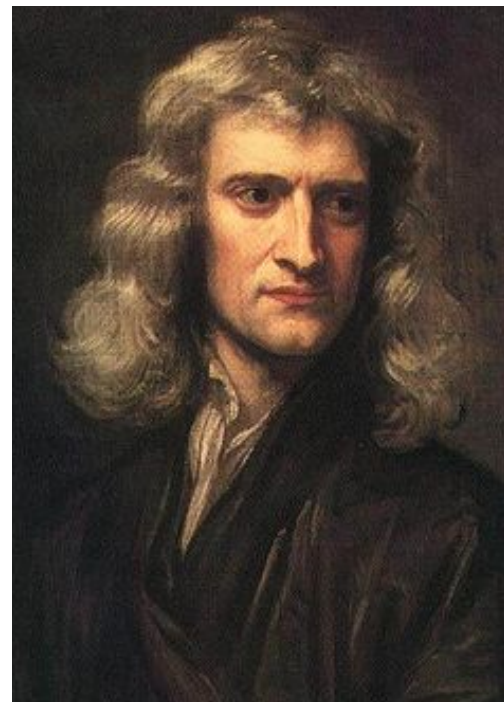


$$\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = - \nabla p$$
$$\operatorname{div} u = 0$$

Le système de Navier-Stokes (1820-1845)

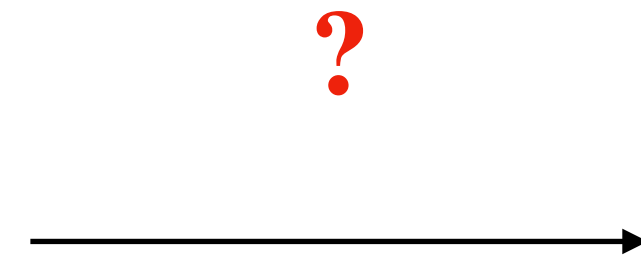
**Question 2** : qu'en est-il de la résolution de ce système ?

# Du microscopique au macroscopique, en passant par le mésoscopique ?



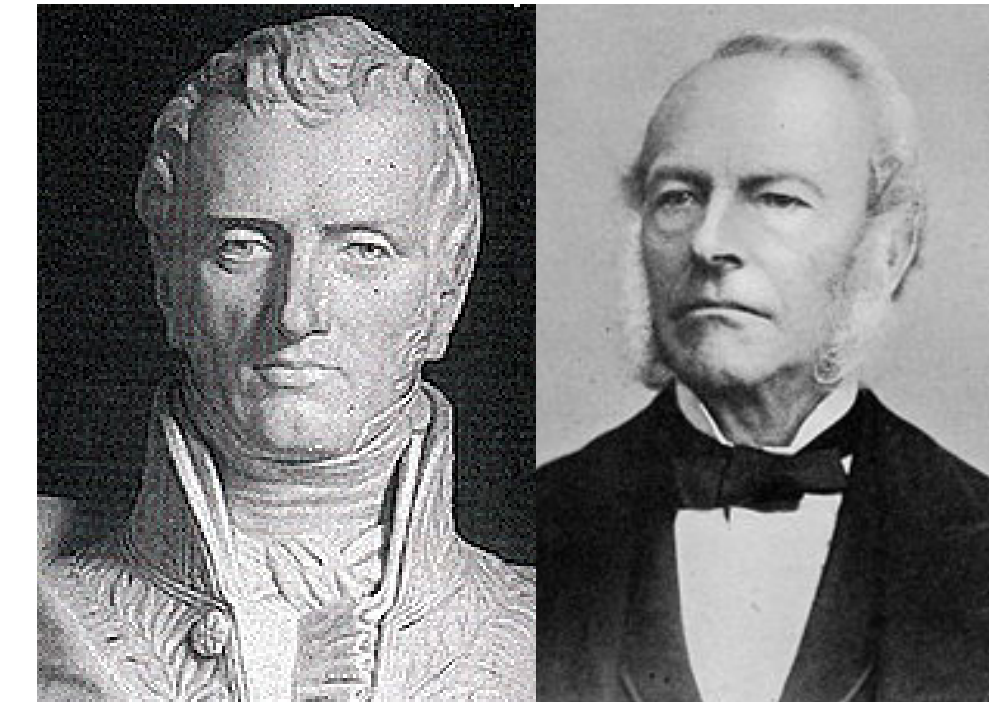
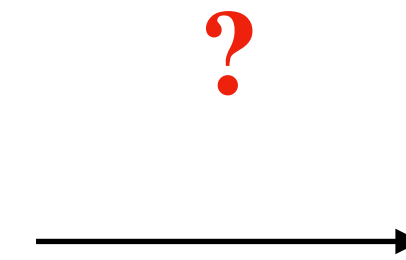
Newton

*micro*



Boltzmann

*méso*



Navier-Stokes

*macro*

# Du microscopique au mésoscopique : il y a un **paradoxe** à lever



L'équation de Boltzmann est **irréversible** alors que la dynamique des particules est **réversible**.

$$\frac{d}{dt} \int -f(t, x, v) \log f(t, x, v) \geq 0.$$



**Paradoxe** de Loschmidt, 1876.

## Du microscopique au mésoscopique ?

On peut démontrer que l'équation de Boltzmann est bien une **limite** des équations des particules.



### **Théorème de Lanford, 1974**

*Sous une hypothèse de chaos initial et sur un temps court, les particules constituant un gaz raréfié deviennent indépendantes dans la limite où leur nombre tend vers l'infini. Leur densité obéit alors à l'équation de Boltzmann.*

## Du microscopique au mésoscopique ?

On peut démontrer que l'équation de Boltzmann est bien une **limite** des équations des particules.



### **Théorème de Lanford, 1974**

*Sous une hypothèse de chaos initial et sur un temps court, les particules constituant un gaz raréfié deviennent indépendantes dans la limite où leur nombre tend vers l'infini. Leur densité obéit alors à l'équation de Boltzmann.*

La démonstration complète de ce résultat a pris plusieurs années, avec des contributions importantes en 1994, 1998, et la touche finale en 2014 !

## Du microscopique au mésoscopique ?

On peut démontrer que l'équation de Boltzmann est bien une **limite** des équations des particules.



### **Théorème de Lanford, 1974**

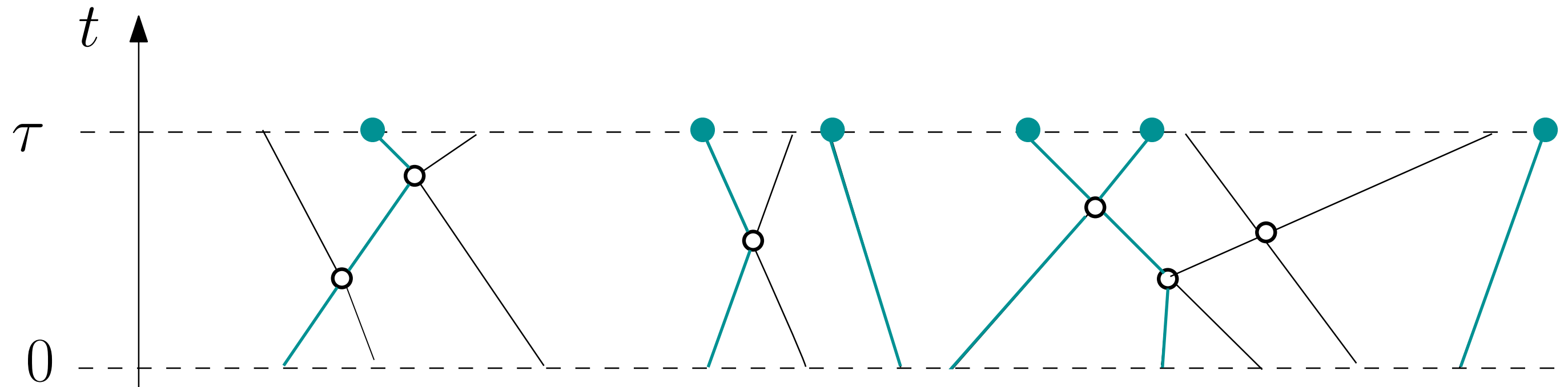
*Sous une hypothèse de chaos initial et sur un temps court, les particules constituant un gaz raréfié deviennent indépendantes dans la limite où leur nombre tend vers l'infini. Leur densité obéit alors à l'équation de Boltzmann.*

La démonstration complète de ce résultat a pris plusieurs années, avec des contributions importantes en 1994, 1998, et la touche finale en 2014 !

En 2025, Y. Deng, Z. Hani et X. Ma ont réussi à l'étendre **sur un temps arbitrairement grand** (tant qu'il existe une solution régulière à l'équation de Boltzmann).

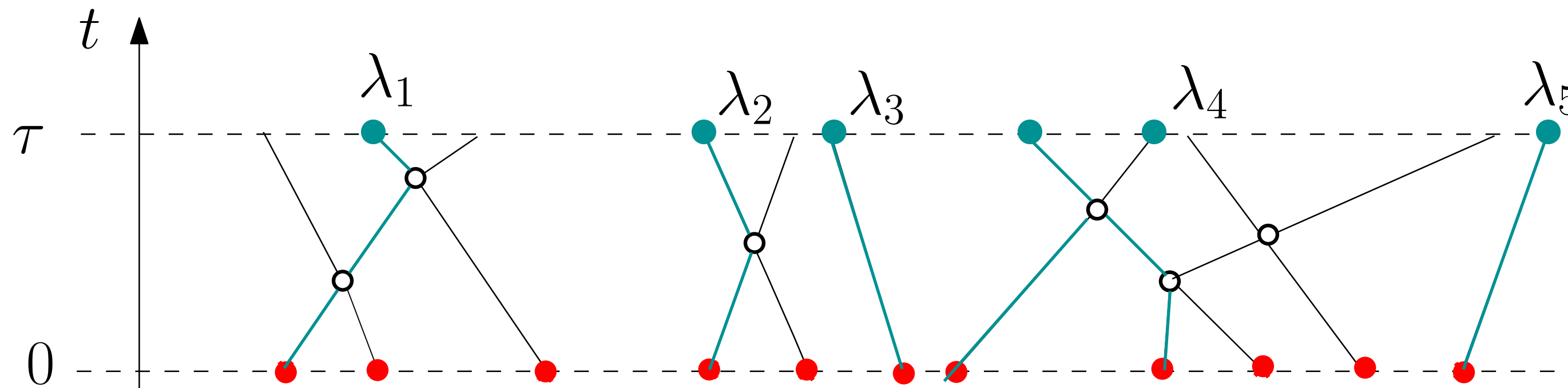
# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Étape 1 : décomposition en *graphes de collision*



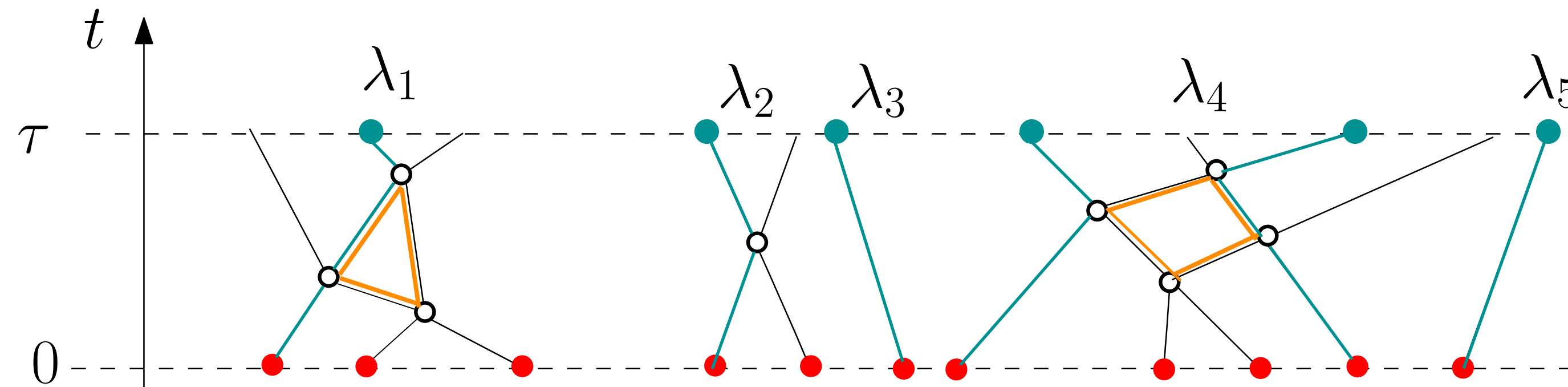
# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Étape 1 : décomposition en *graphes de collision*



# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Étape 1 : décomposition en *graphes de collision*



Certains d'entre eux peuvent comporter des « boucles ». Elles représentent des *recollisions*.

## Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Étape 1 : décomposition en *clusters dynamiques*

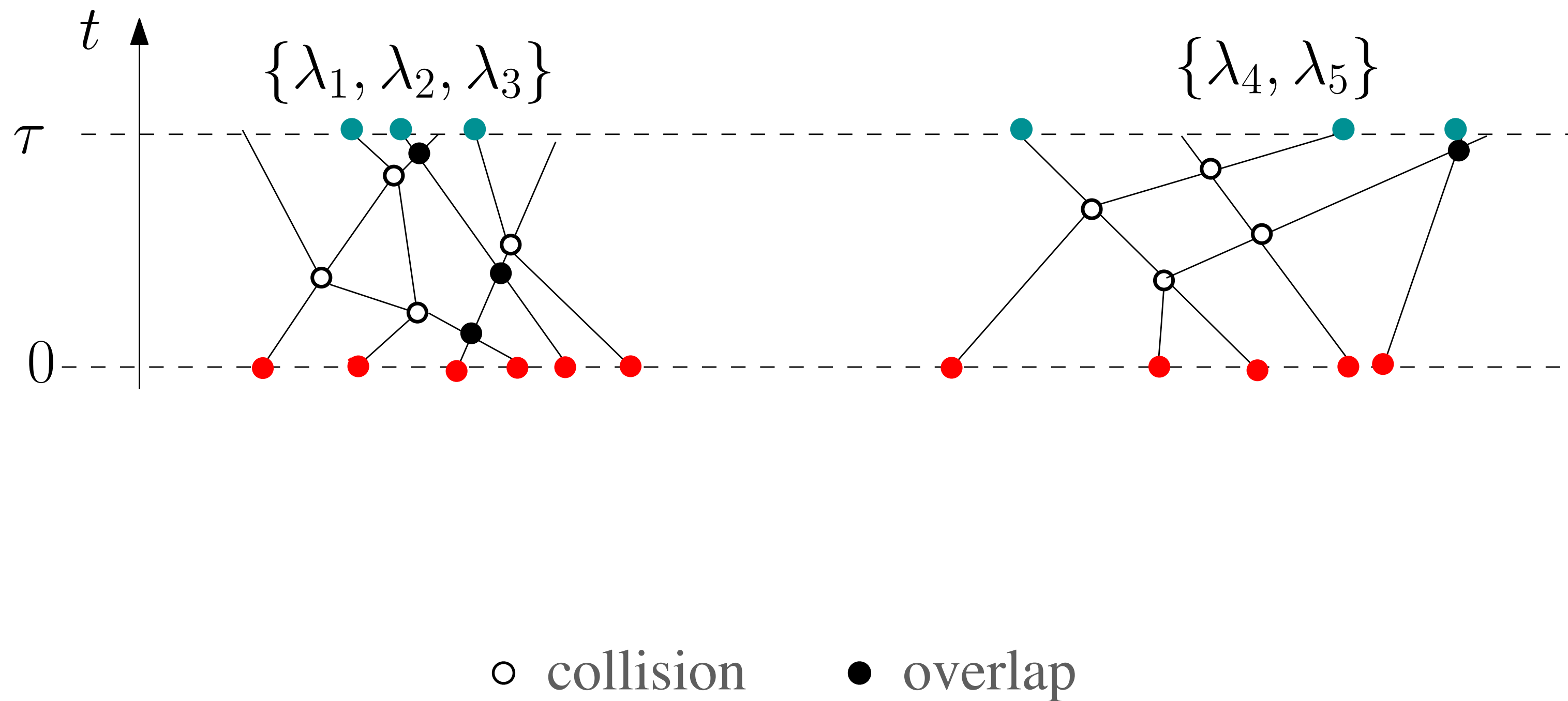
La condition d'exclusion est développée en

$$\prod_{\substack{i,j \leq n \\ i \neq j}} \mathbf{1}_{\lambda_i \not\sim \lambda_j} = \prod_{\substack{i,j \leq n \\ i \neq j}} (1 - \mathbf{1}_{\lambda_i \sim \lambda_j}).$$

Le développement du produit dans le membre de droite conduit à des termes du type  $\mathbf{1}_{\lambda_{i_1} \sim \lambda_{i_2}} \mathbf{1}_{\lambda_{i_2} \sim \lambda_{i_3}} \dots$ , et donc à la notion (non dynamique) d'*overlap*.

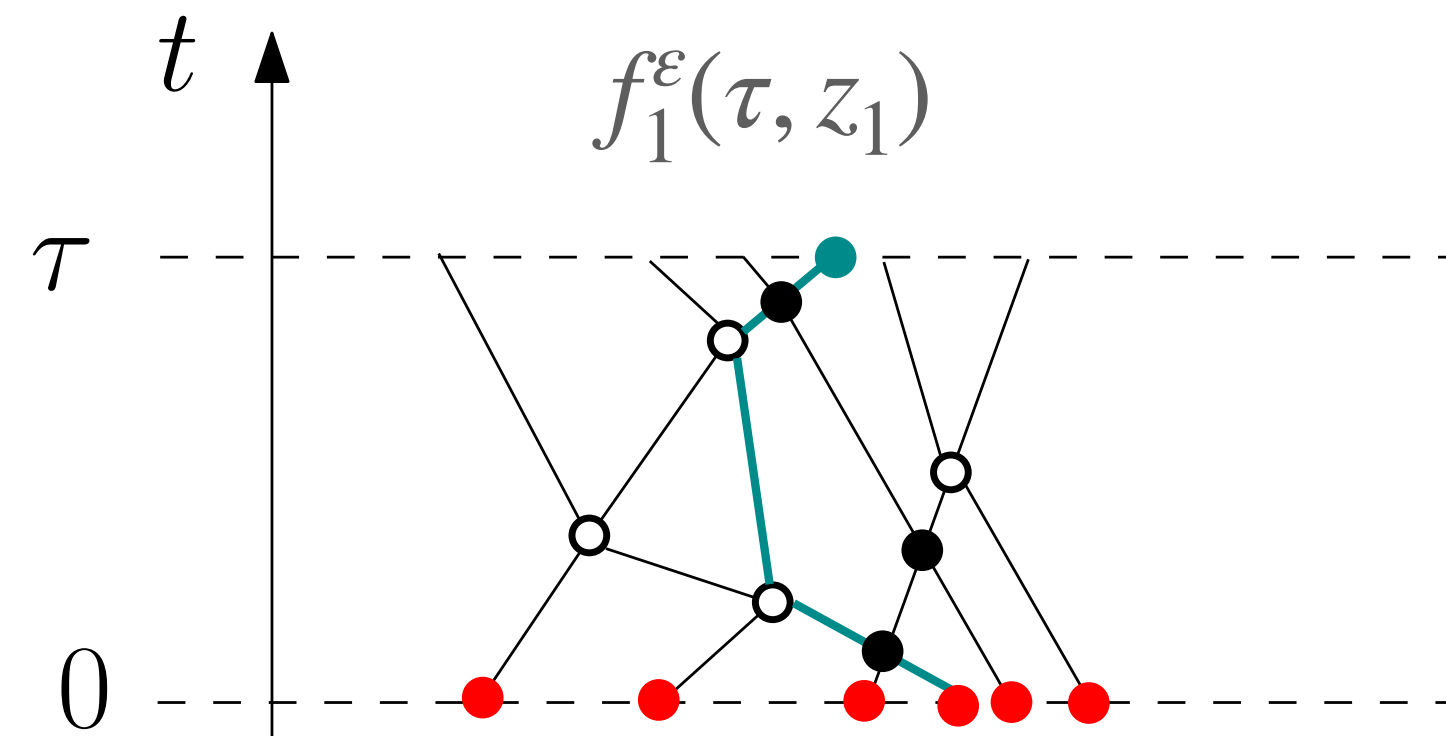
# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Étape 1 : décomposition en *clusters dynamiques*



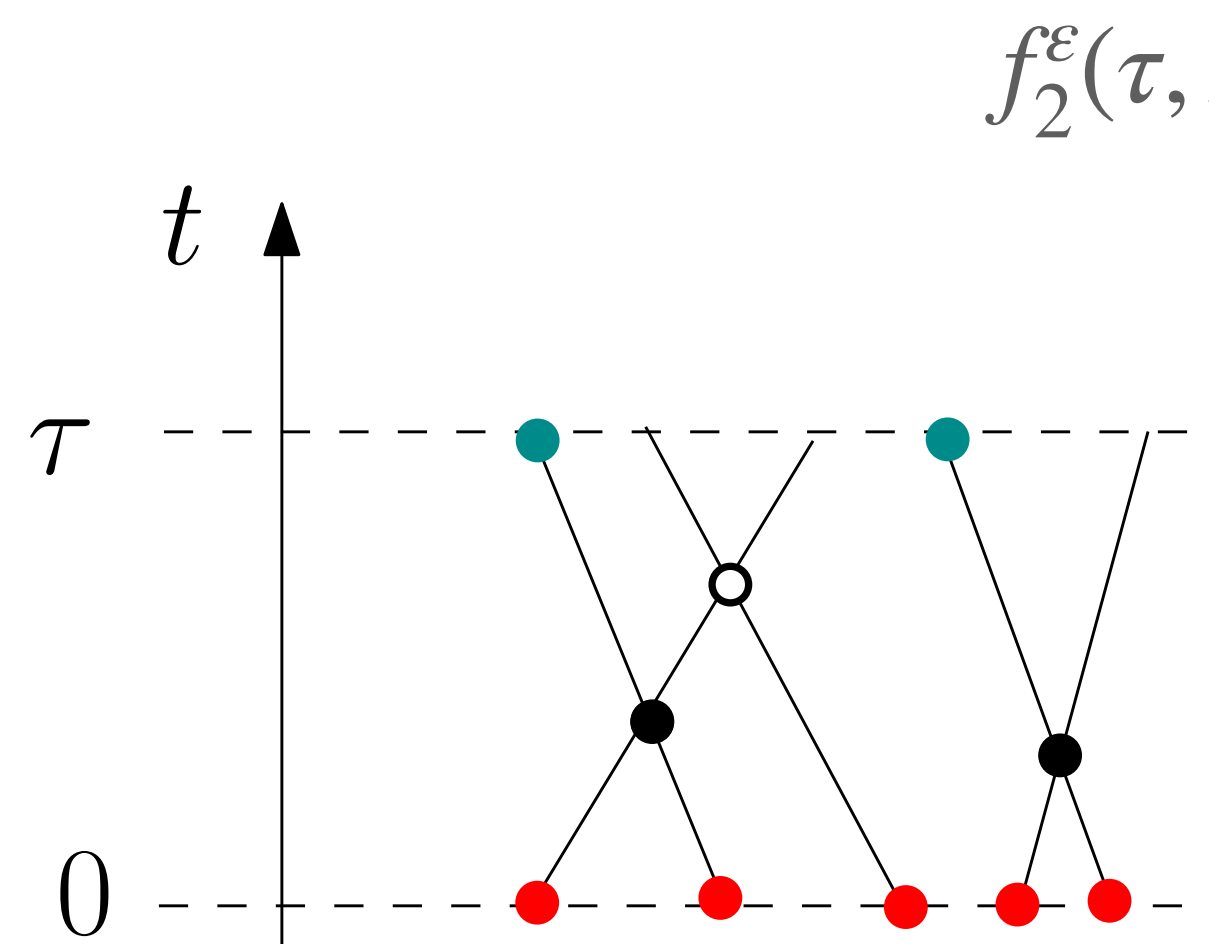
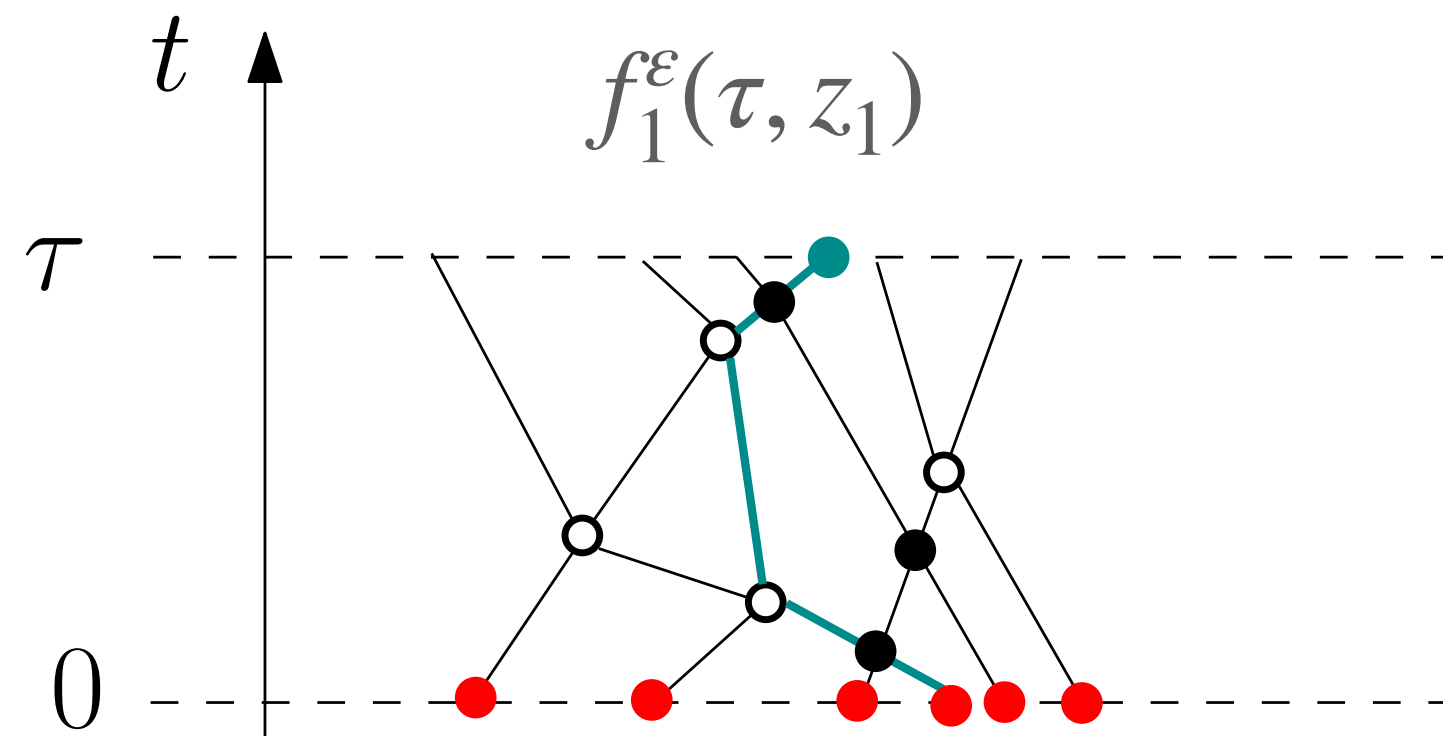
# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Lien avec les fonctions de corrélation : le cas d'une particule  $f_1^\varepsilon(\tau, z_1)$



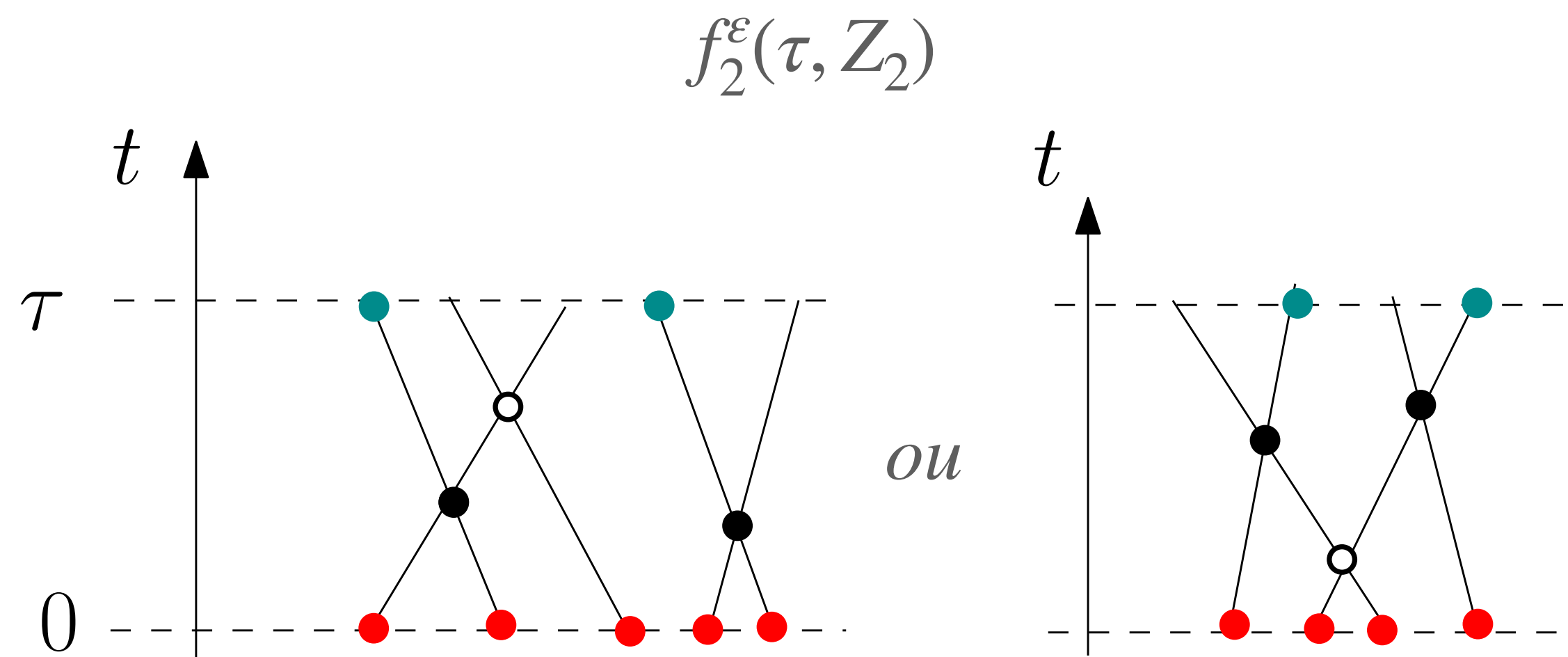
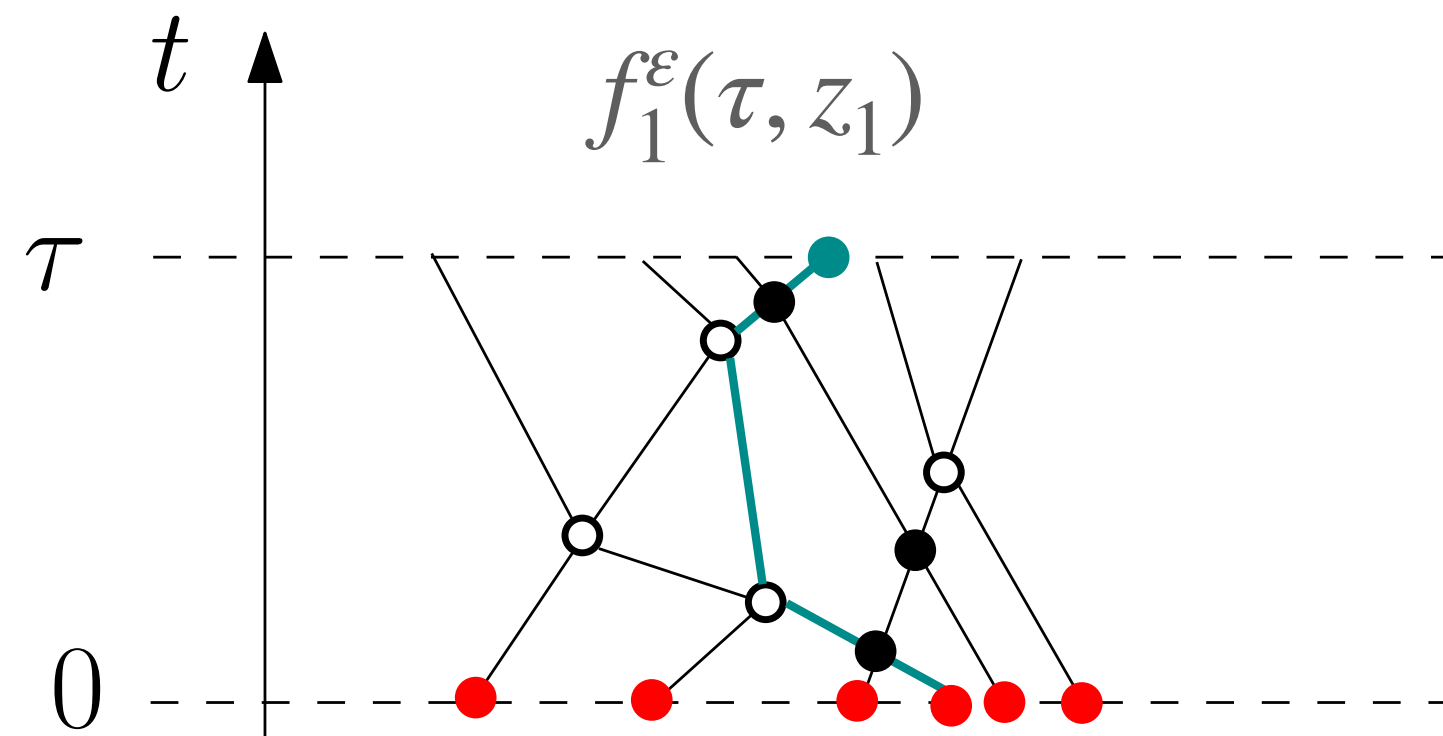
# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Lien avec les fonctions de corrélation : le cas d'une particule  $f_1^\varepsilon(\tau, z_1)$  et de deux  $f_2^\varepsilon(\tau, Z_2)$



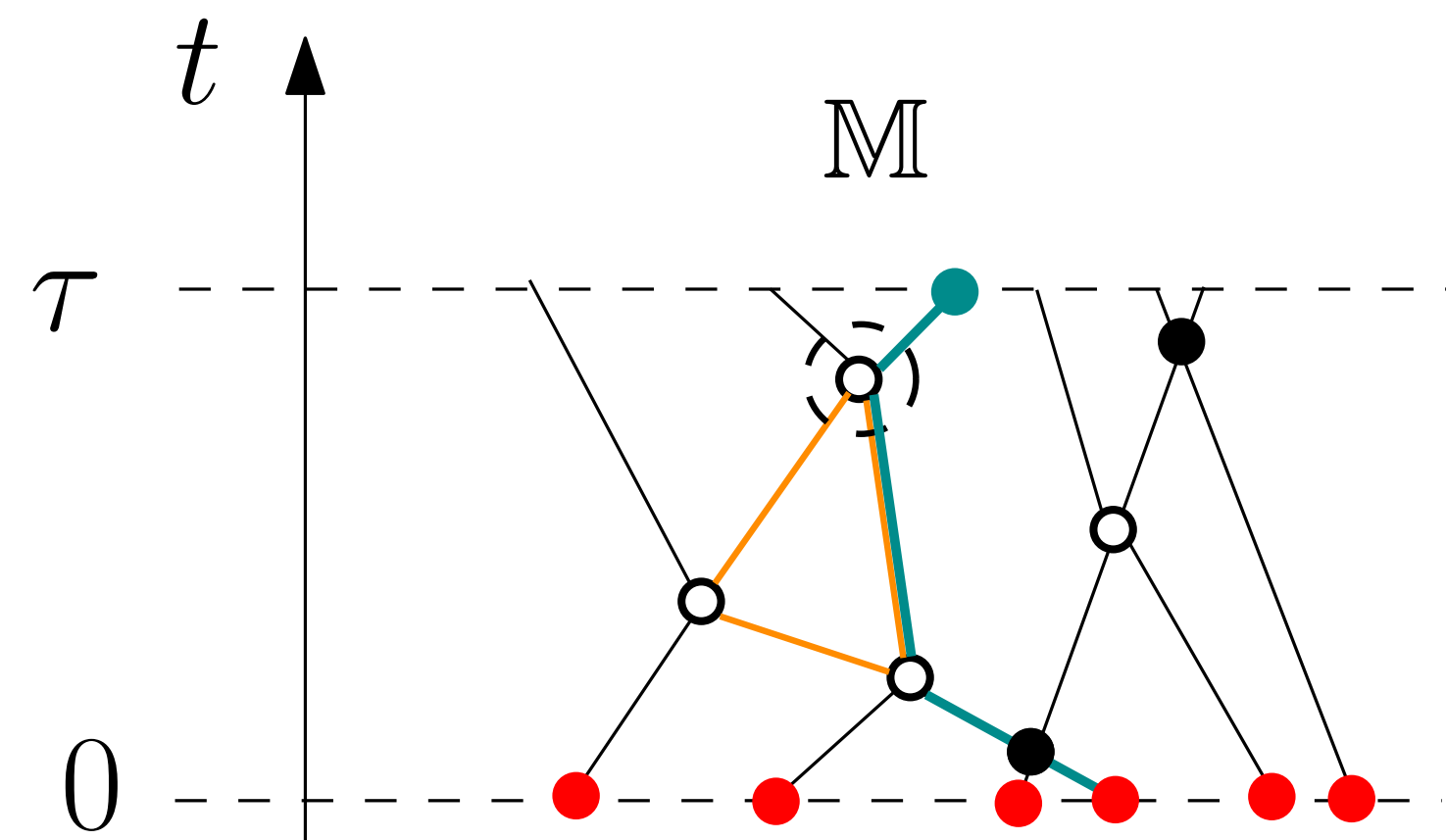
# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Lien avec les fonctions de corrélation : le cas d'une particule  $f_1^\varepsilon(\tau, z_1)$  et de deux  $f_2^\varepsilon(\tau, Z_2)$

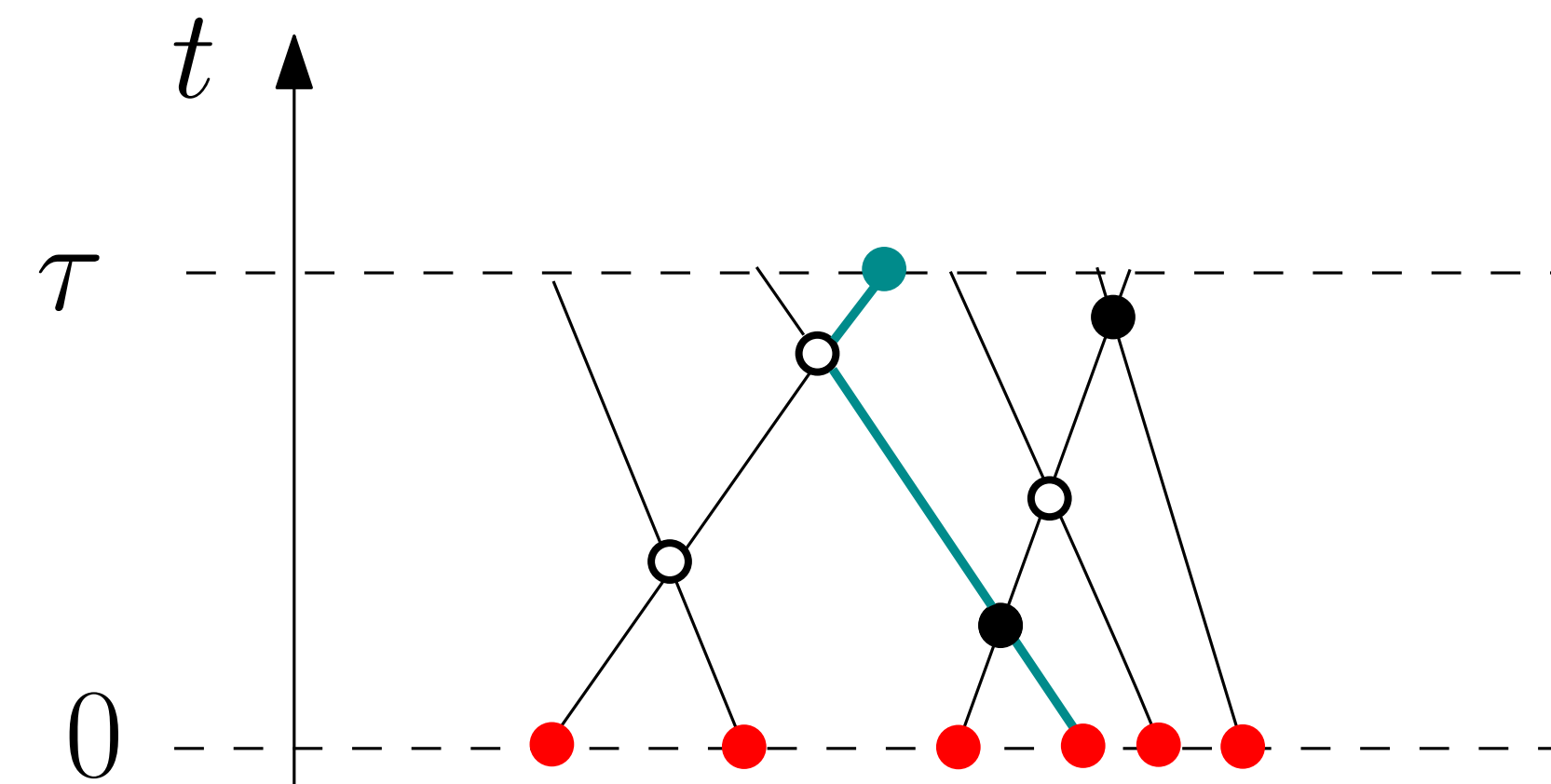


# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Étape 2 : élimination des recollisions



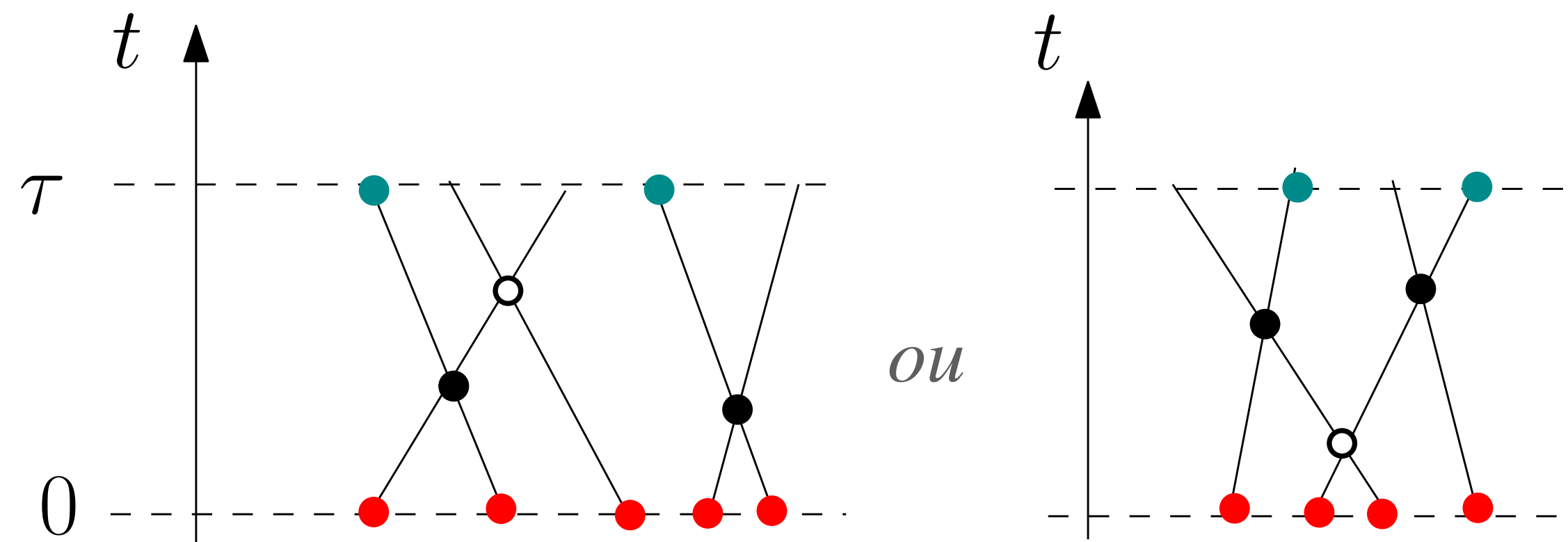
À l'ordre principal il ne reste que



# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Étape 2 : propagation du chaos

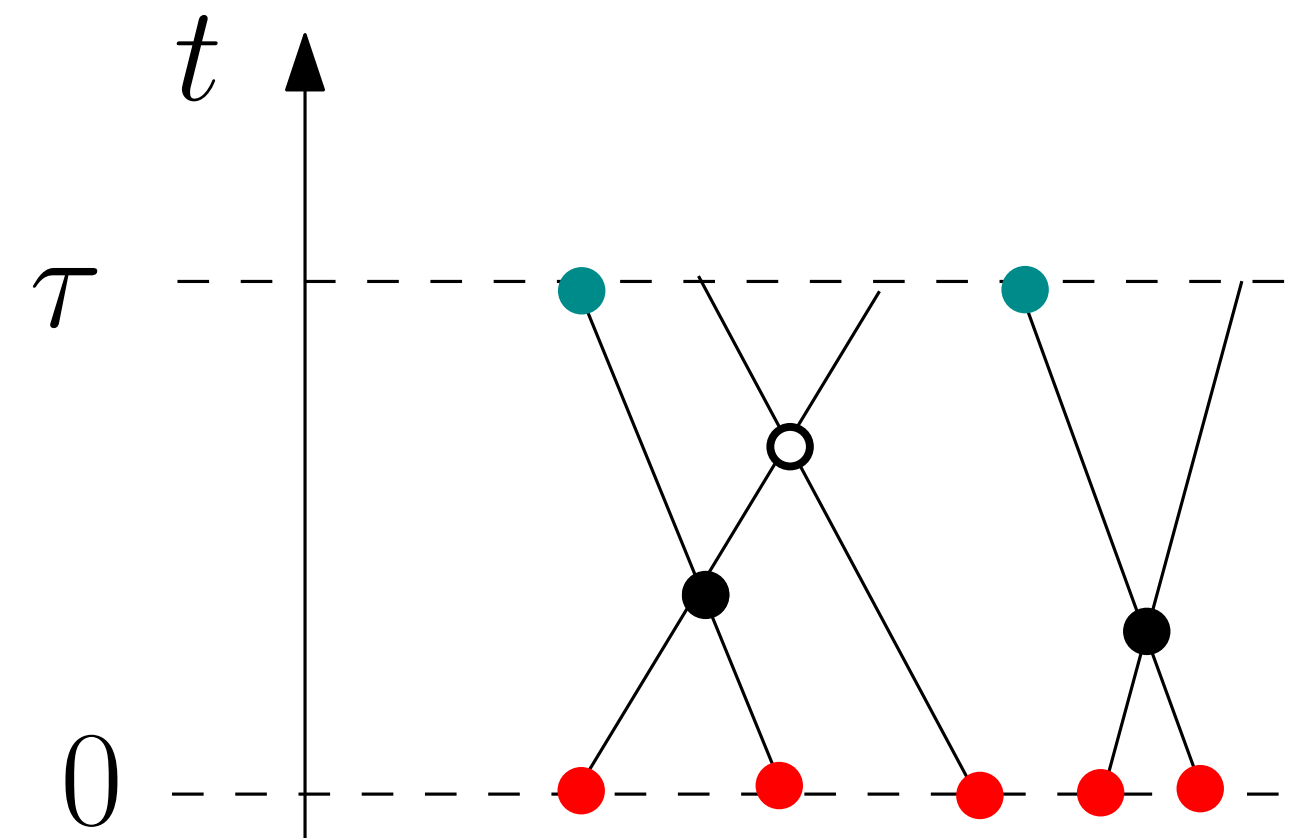
La deuxième fonction de corrélation  $f_2^\varepsilon$  se représente par



# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Étape 2 : propagation du chaos

À l'ordre principal pour  $f_2^\varepsilon$  il ne reste que

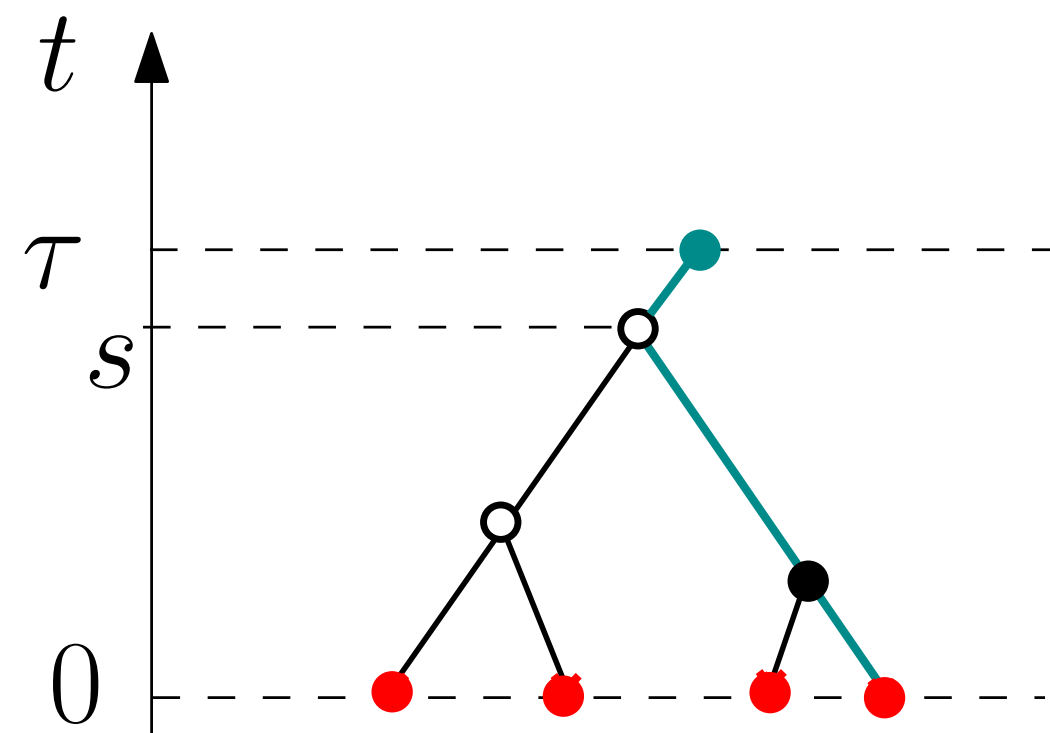


en d'autres termes  $f_2^\varepsilon \sim f_1^\varepsilon \otimes f_1^\varepsilon$ .

# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

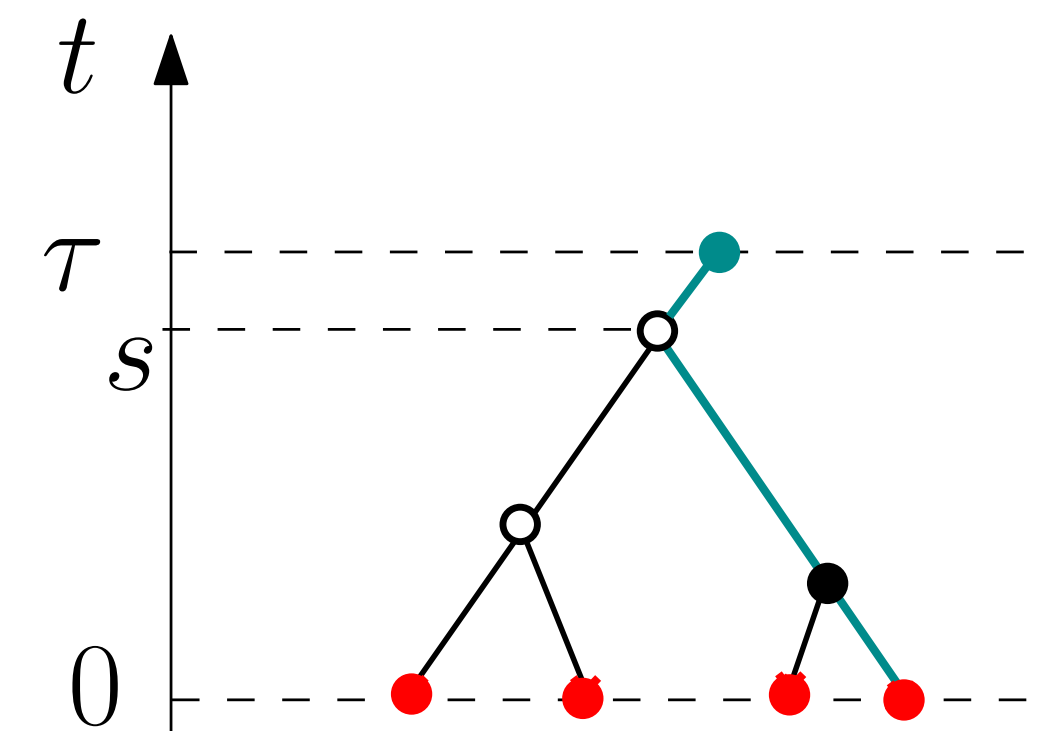
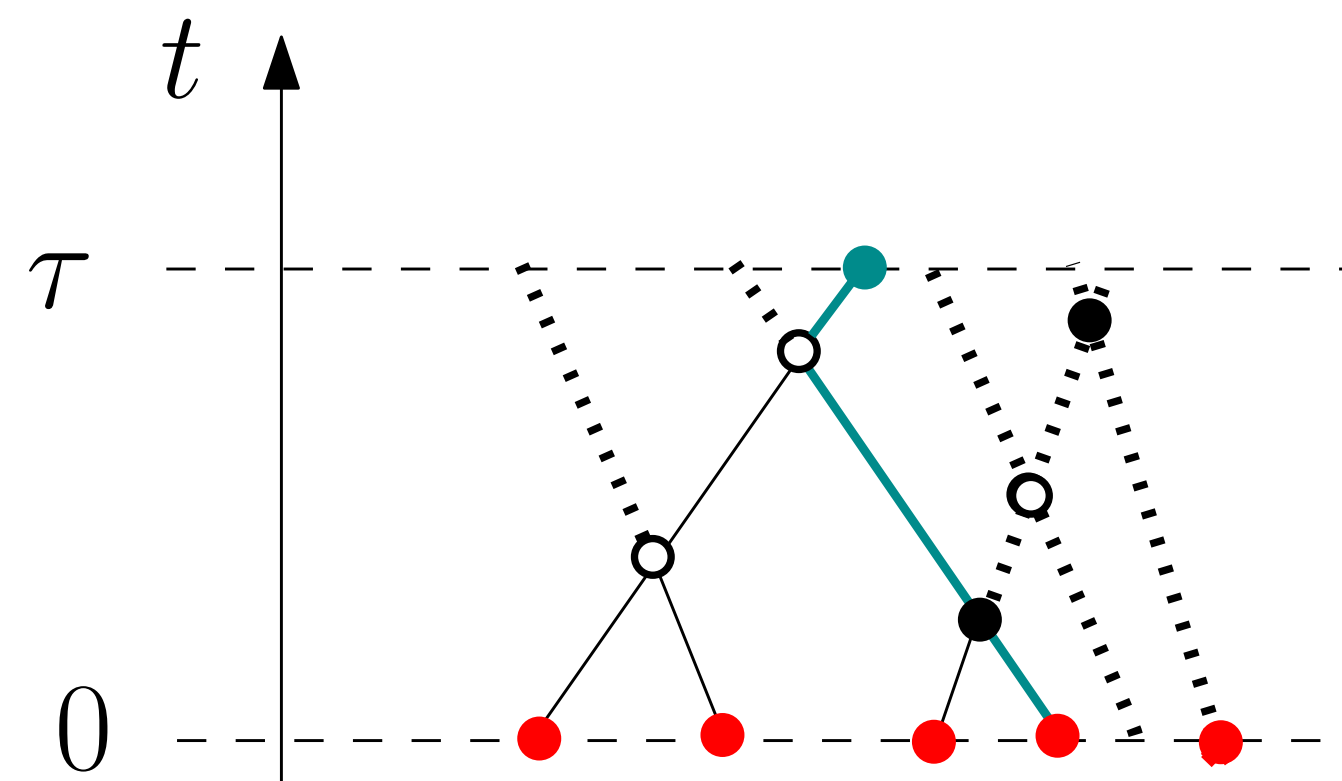
- Étape 3 : obtention de l'équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann peut se représenter par



# Démonstration du théorème de Lanford (clusters dynamiques)

- Étape 3 : obtention de l'équation de Boltzmann



# Deuxième partie : sur les équations de Navier-Stokes

# Résolution des équations de Navier-Stokes : existence globale de solutions

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\nabla p$$

$$\operatorname{div} u = 0$$

L'énergie est (formellement) conservée :

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2.$$

# Résolution des équations de Navier-Stokes : existence globale de solutions

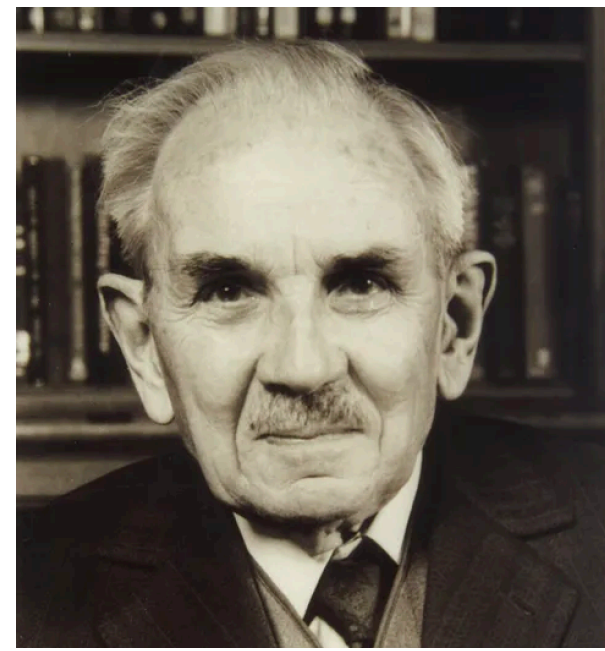
$$\begin{aligned}\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u &= -\nabla p \\ \operatorname{div} u &= 0\end{aligned}$$

L'énergie est (formellement) conservée :

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2.$$

On peut donc chercher à **résoudre l'équation dans l'espace** d'énergie, par un schéma d'approximation type Galerkin. Malheureusement il n'y a pas assez de régularité pour garantir l'unicité des solutions.

# Résolution des équations de Navier-Stokes : existence globale de solutions



## **Théorème de Leray, 1934**

*Pour toute donnée initiale d'énergie finie, il existe au moins une solution « turbulente » pour tout temps, qui est d'énergie finie.*

## Résolution des équations de Navier-Stokes : unicité des solutions de Leray ?

Supposons que  $u$  et  $v$  sont deux solutions de Leray, et calculons l'énergie de  $w := v - u$ .

## Résolution des équations de Navier-Stokes : unicité des solutions de Leray ?

Supposons que  $u$  et  $v$  sont deux solutions de Leray, et calculons l'énergie de  $w := v - u$ .

L'équation satisfaite par  $w$  est  $\partial_t w + u \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v - \nu \Delta w = -\nabla q$  et donc

$$\frac{1}{2} \|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 - \int_0^t (w \cdot \nabla v) \cdot w(t') dt'$$

## Résolution des équations de Navier-Stokes : unicité des solutions de Leray ?

Supposons que  $u$  et  $v$  sont deux solutions de Leray, et calculons l'énergie de  $w := v - u$ .

L'équation satisfaite par  $w$  est  $\partial_t w + u \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v - \nu \Delta w = -\nabla q$  et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' &= \frac{1}{2} \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 - \int_0^t (w \cdot \nabla v) \cdot w(t') dt' \\ &= \frac{1}{2} \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t (w \cdot \nabla w) \cdot v(t') dt' \end{aligned}$$

## Résolution des équations de Navier-Stokes : unicité des solutions de Leray ?

Supposons que  $u$  et  $v$  sont deux solutions de Leray, et calculons l'énergie de  $w := v - u$ .

L'équation satisfaite par  $w$  est  $\partial_t w + u \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v - \nu \Delta w = -\nabla q$  et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' &= \frac{1}{2} \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 - \int_0^t (w \cdot \nabla v) \cdot w(t') dt' \\ &= \frac{1}{2} \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t (w \cdot \nabla w) \cdot v(t') dt' \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' + \frac{1}{2} \int_0^t \|w(t')\|_{L^2}^2 \|v(t')\|_{L^\infty}^2 dt'. \end{aligned}$$

## Résolution des équations de Navier-Stokes : unicité des solutions de Leray ?

On en déduit que

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^t \|v(t')\|_{L^\infty}^2 dt'\right).$$

C'est un résultat d'**unicité conditionnelle**, ou unicité fort-faible : si l'une des deux solutions est plus régulière que prévu, alors toutes les solutions de Leray coïncident avec celle-ci.

## Résolution des équations de Navier-Stokes : unicité des solutions de Leray ?

On en déduit que

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^t \|v(t')\|_{L^\infty}^2 dt'\right).$$

C'est un résultat d'**unicité conditionnelle**, ou unicité fort-faible : si l'une des deux solutions est plus régulière que prévu, alors toutes les solutions de Leray coïncident avec celle-ci.

En **dimension deux** d'espace les solutions de Leray sont **uniques**. Cela est lié à l'équation sur la vortacité

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = 0$$

## Résolution des équations de Navier-Stokes : unicité des solutions de Leray ?

On en déduit que

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^t \|v(t')\|_{L^\infty}^2 dt'\right).$$

C'est un résultat d'**unicité conditionnelle**, ou unicité fort-faible : si l'une des deux solutions est plus régulière que prévu, alors toutes les solutions de Leray coïncident avec celle-ci.

En **dimension deux** d'espace les solutions de Leray sont **uniques**. Cela est lié à l'équation sur la vorticité

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = 0$$

qui en dimension trois s'écrit

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla u - \nu \Delta \omega = 0.$$

# Résolution des équations de Navier-Stokes : unicité des solutions de Leray ?

La question de l'unicité des solutions de Leray a connu des développements récents :

- en 2021, D. Albritton, E. Brué et M. Colombo ont obtenu la non unicité pour NS avec forçage et donnée initiale nulle.
- en 2025, T. Hou, Y. Wang et C. Yang ont obtenu une infinité de solutions pour NS sans forçage, par une preuve assistée par ordinateur.

## Résolution des équations de Navier-Stokes : solutions régulières ?

On peut chercher à obtenir des solutions régulières, en « oubliant » l'énergie. On résout alors l'équation en général par une méthode de *point fixe*, en considérant l'équation sous la forme

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-t')\Delta}\mathbb{P}(u \cdot \nabla u(t')) dt'$$

et la structure du terme non linéaire est négligée.

## Résolution des équations de Navier-Stokes : solutions régulières ?

On peut chercher à obtenir des solutions régulières, en « oubliant » l'énergie. On résout alors l'équation en général par une méthode de *point fixe*, en considérant l'équation sous la forme

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-t')\Delta}\mathbb{P}(u \cdot \nabla u(t')) dt'$$

et la structure du terme non linéaire est négligée. On obtient des **solutions globales régulières à données petites**, et si les données sont grandes, on ne peut a priori pas étendre la solution au-delà d'un temps court.

## Résolution des équations de Navier-Stokes : solutions régulières ?

On peut chercher à obtenir des solutions régulières, en « oubliant » l'énergie. On résout alors l'équation en général par une méthode de *point fixe*, en considérant l'équation sous la forme

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-t')\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u(t')) dt'$$

et la structure du terme non linéaire est négligée. On obtient des **solutions globales régulières à données petites**, et si les données sont grandes, on ne peut a priori pas étendre la solution au-delà d'un temps court.

La question du **comportement de la solution au-delà de ce temps** est une question de la Fondation Clay de 2000. De fortes indications (J. Chen et T. Hou par des preuves assistées par ordinateur ; T. Buckmaster, J. Gómez-Serrano, C-Y. Lai et Y. Wang par des réseaux de neurones) indiquent une possible explosion en temps fini, de type auto-similaire.

## Résolution des équations de Navier-Stokes : solutions régulières ?

On peut chercher à obtenir des solutions régulières, en « oubliant » l'énergie. On résout alors l'équation en général par une méthode de *point fixe*, en considérant l'équation sous la forme

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-t')\Delta}\mathbb{P}(u \cdot \nabla u(t')) dt'$$

et la structure du terme non linéaire est négligée. On obtient des **solutions globales régulières à données petites**, et si les données sont grandes, on ne peut a priori pas étendre la solution au-delà d'un temps court.

La question du **comportement de la solution au-delà de ce temps** est une question de la Fondation Clay de 2000. De fortes indications (J. Chen et T. Hou par des preuves assistées par ordinateur ; T. Buckmaster, J. Gómez-Serrano, C-Y. Lai et Y. Wang par des réseaux de neurones) indiquent une possible explosion en temps fini, de type auto-similaire.

Dans le cas des **équations compressibles**, l'implosion en temps fini est connue depuis les travaux de F. Merle, P. Raphaël, I. Rodianski et J. Szeftel de 2022.

## Questions ouvertes

De Newton vers Boltzmann :

- Comportement du système si la solution de Boltzmann n'est pas régulière
- Le cas de gaz non raréfiés
- Des particules non sphériques
- Des potentiels d'interaction plus généraux
- Le cas de domaines à bords
- Les données non chaotiques : génération du chaos vs propagation du chaos

Navier-Stokes

- Comportement des solutions régulières au temps d'explosion
- Solutions stationnaires
- Effets géophysiques (couplage océan-atmosphère, rotation de la Terre)
- Turbulence